Stadardinormeja, ns. l^p-**normeja** vektorille $x \in \mathbf{R}^n$ ovat

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{ja} \quad \|x\|_\infty = \max_i |x_i| \ .$$

Määritelmä

A:n **matriisinormi** *on* $\|A\| = \max_{i \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Erityisesti voidaan osoittaa, etta normilla $p = 1$ saadaan $\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ ja arvolla $p = \infty$: $\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Lause

1. $\|A\| = c \Rightarrow \|Ax\| \leq c\|x\| \ \forall x \in \mathbf{R}^n$
2. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
3. $\|A^m\| \leq \|A\|^m, \ m = 0, 1, 2, \dots$

Matriisieksponentti 1

Olemme nähneet, että neliömatriisille voidaan laskea mielivaltainen potenssi, joskus jopa juuri (suoraan tai Spektraalilauseen avulla) jne. Entä eksponenttifunktio?

Lause

Sarjakehitelmä $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ *suppenee absoluuttisesti jokaiselle neliömatriisille* A*. Määritellään, että tämä summa,* $n \times n$ *matriisi, on* **matriisieksponentti** e^A*. Sille pätee* $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

Tod.: Jos $\|A\| \leq c$, niin edellisen lauseen nojalla $\|\frac{A^k}{k!}\| \leq \frac{c^k}{k!}$. Toisaalta $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!}$ suppenee kaikille $c \in \mathbf{R}$. Siten $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ suppenee (yleistetyn) vertailutestin nojalla. Koska edelleen kolmioepäyhtälön nojalla $\| \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} \| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{\|A\|^k}{k!}$, $\forall N$, seuraa tulos. QED

Matriisieksponentti 2

Edellinen Lause antoi matriisieksponentin olemassaolon. Seuraava on erittäin hyödyllinen sen laskennassa.

Lause

Olkoot P, S ja T $n \times n$ matriiseja. Silloin

1. $Q = PTP^{-1} \Rightarrow e^Q = Pe^T P^{-1}$,
2. $ST = TS \Rightarrow e^{S+T} = e^S e^T$,
3. $e^{-S} = (e^S)^{-1}$ *eli* e^S *kääntyy jokaiselle* S.

Matriisieksponentti 2

Edellinen Lause antoi matriisieksponentin olemassaolon. Seuraava on erittäin hyödyllinen sen laskennassa.

Lause

Olkoot P, S ja T $n \times n$ matriiseja. Silloin

1. $Q = PTP^{-1} \Rightarrow e^Q = Pe^T P^{-1}$,
2. $ST = TS \Rightarrow e^{S+T} = e^S e^T$,
3. $e^{-S} = (e^S)^{-1}$ *eli* e^S *kääntyy jokaiselle* S.

Tod., ideat: 1. Koska $P(A+B)P^{-1} = PAP^{-1} + PBP^{-1}$ ja $(PTP^{-1})^k = PT^kP^{-1}$ saadaan
$P(\sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!})P^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} \to e^Q$ kun $n \to \infty$.
2. Jos $ST = TS$, niin Binomikaava toimii eli
$(S+T)^n = \sum_{j,k\geq 0,\ j+k=n} \binom{n}{j} S^j T^k$, josta edelleen (apulemmalla)
$e^{S+T} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \sum_{j,k\geq 0,\ j+k=n} \binom{n}{j} S^j T^k = \sum_{j=0}^\infty \frac{S^j}{j!} \sum_{k=0}^\infty \frac{T^k}{k!}$.
3. Sijoitetaan $T = -S$ edelliseen. QED

Matriisieksponentti 3

Esimerkki: Olkoon

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = aI + B.$$

Triviaalisti I ja B kommutoivat, joten Lauseen nojalla $e^T = e^{aI} e^B$. Koska kaikille diagonaaleille pätee $e^{\lceil d_1, \ldots, d_n \rfloor} = \lceil e^{d_1}, \ldots, e^{d_n} \rfloor$, nähdään, että $e^{aI} = e^a I$.
e^B ratkaistaan diagonalisoimalla ensin B. $|B - \lambda I| = \lambda^2 + b^2 = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = \pm ib$, joita vastaavat ominaisvektorit ovat $x_+ = (i, 1)^T$ ja $x_- = (1, i)^T$. Siten diagonalisoinnissa $B = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{pmatrix} ib & 0 \\ 0 & -ib \end{pmatrix}.$$

Koska nyt $e^D = \lceil e^{ib}, e^{-ib} \rfloor$, saadaan näistä edelleen Lauseen nojalla

$$e^B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ib} & 0 \\ 0 & e^{-ib} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix},$$

josta matriisieksponentti

$$e^T = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

Matriisieksponentti 4

Esimerkki: Olkoon

$$T = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aI + B.$$

Kuten edellä

$$e^T = e^a e^B = e^a \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right) .$$

Mutta nyt on helppo nähdä, että $B^n = 0, \forall n \geq 3$. Siten kehitelmä on äärellinen ja saadaan

$$e^T = e^a \left(I + B + \frac{B^2}{2!} \right) = e^a \begin{pmatrix} 1 & b & \frac{b^2}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & be^a & \frac{b^2}{2} e^a \\ 0 & e^a & be^a \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix} .$$

NB. Matriisi, jolla on ominaisuus $A^k = 0$ jollekin potenssille k on **nilpotentti**. Yllä oleva esimerkki yleistyy niille välittömästi. Jordanin blokit ovat aina muotoa $I+$nilpotentti. Siten (periaatteessa) kaikki matriisieksponentit ovat laskettavissa yo. menetelmällä, koska jokainen neliömatriisi on similaari Jordan muodon kanssa.

Matriisieksponentti 5

Esimerkki: Jordanin muodot ja matriisieksponentti *Mathematica*lla:

```
In[52]:= a = {{2, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {1, -1, 1, 0}, {1, -1, 1, 1}};

In[59]:= Map[MatrixForm, {a}]
```

Out[59]= $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

```
In[54]:= {t, j} = JordanDecomposition[a];

In[55]:= Map[MatrixForm, {t, j}]
```

Out[55]= $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

```
In[56]:= Map[MatrixForm, {t.j.Inverse[t], t.MatrixExp[j].Inverse[t], MatrixExp[a]}]
```

Out[56]= $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ -e + e^2 & -e & e & 0 \\ -3\,e + 2\,e^2 & -\frac{3\,e}{2} & e & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ -e + e^2 & -e & e & 0 \\ -3\,e + 2\,e^2 & -\frac{3\,e}{2} & e & e \end{pmatrix}\right\}$

Matriisieksponentti 6

Seurauslause

Jos matriisin A spektri on $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, niin A:n matriisieksponentin spektri on $\{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\}$.
Jos x on matriisin A ominaisarvoon λ liittyvä ominaisvektori, niin x on myös e^A:n ominaisarvoon e^λ liittyvä ominaisvektori.

Tod. $e^A x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k x}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k x}{k!} = e^\lambda x.$ QED

Huomaa, että A:n positiiviset (vast. negatiiviset) ominaisarvot merkitsevät sitä, että vastaavaan ominaissuuntaan (ominaisvektorin x määräämään suuntaan) e^A:n ominaisarvo on

- > 1, jolloin e^A on **ekspansio** eli **laajennus** tai
- < 1, jolloin e^A on **kontraktio** eli **supistus**

tähän suuntaan x. Tämä jako on hyvin oleellinen seuraavan aihepiirin, dynaamisten systeemien, analyysissä.