Seuraavaksi tarkastellaan **ensimmäisen kertaluvun lineaarista, vakiokertoimista differentiaaliyhtälösysteemiä**

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\
\dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\
\qquad\vdots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n
\end{cases}
$$

alkuarvoilla $x_i(0) = a_i, \;\; i = 1, \ldots, n.$

Mikäli **ohjaustermit** häviävät eli $b_i(t) \equiv 0$ jokaiselle i, on systeemi **homogeeninen**, jos taas ei-triviaaleja ohjaustermejä on mukana, on systeemi **epähomogeeninen**.

Differentiaaliyhtälösysteemit (Dys) 2 (Kreyszig 4.6)

Matriisimuodossa homogeeninen yhtälö on

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = a,$$

jossa

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ja } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Epähomogeeninen yhtälö saa muodon

$$x'(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(0) = a,$$

jossa siis b on (mahdollisesti t-riippuva) n-ulotteinen pystyvektori.

Myös merkintää $\dot{x}$ käytetään t-derivaatalle (fluxio).

Samoin kuin vektorin derivaatta on komponentittainen derivaatta, on matriiisin derivaatta alkioittainen derivaatta.

Lemma

Neliömatriisille A pätee: $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A \quad \forall t \in \mathbf{R}$.

Tod. Erotusosamäärään palauttaen saadaan

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h}$$
$$= e^{tA} \lim_{h\to 0} \frac{e^{hA} - I}{h} = e^{tA}A,$$

jossa on käytetty matriisieksponentin aina suppenevaa sarjakehitelmää $e^{hA} = I + hA + \frac{h^2A^2}{2!} + \frac{h^3A^3}{3!} + \cdots$ QED

Homogeeninen dys (Kreyszig 4.2)

Lause

Alkuarvoprobleeman $x' = Ax,\ x(0) = a$ *yksikäsitteinen ratkaisu on*

$$x(t) = e^{tA}a \ . \qquad (\star)$$

Tod. Lemman nojalla $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}a\right) = Ae^{tA}a$ ja koska $e^{0A}a = a$, niin $(\star)$ on homogeenisen yhtälön ratkaisu.
Olkoon $\tilde{x}(t)$ toinen ratkaisu. Määritellään $y(t) = e^{-tA}\tilde{x}$. Silloin

$$y' = -Ae^{-tA}\tilde{x} + e^{-tA}A\tilde{x} \equiv 0,$$

joten y on vakio. Koska $y(0) = \tilde{x}(0) = a$, niin $\tilde{x} = e^{tA}a$. QED

Matriisieksponenttiratkaisu on lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisutavoista lyhin ja selkein. Se kuitenkin edellyttää matriisieksponentin tuntemusta. Muitakin ratkaisumenetelmiä on, katso Kreyszig jne.

Epähomogeeninen dys 1 (Kreyszig 4.6)

Myös epähomogeeninen systeemi $x' = Ax + b,\ x(0) = a$ saadaan ratkaistua matriisieksponentilla. Menetelmä on kuten "vakion variointi" skalaariteoriassa: etsitään ratkaisua muodossa $x(t) = e^{tA} f(t)$, f tuntematon funktio.

Tällä yritteellä $x' = Ae^{tA} f(t) + e^{tA} f' = Ax + e^{tA} f' = Ax + b$. Siten $f'(t) = e^{-tA} b(t)$, josta $f(t) = \int_0^t e^{-sA} b(s) ds + a$ ja ratkaisuksi saadaan $x(t) = e^{tA} a + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds$. (1) (Tämän voi myös arvata ja derivoimalla todeta alkuperäisen tehtävän ratkaisuksi.)

Lauseke (1) on myös ainoa ratkaisu, sillä jos y on toinen ratkaisu, niin $x' - y' = A(x - y)$, jolla on homogeenisena yhtälönä yksikäsitteinen ratkaisu $e^{tA} k$. Siispä y on muotoa (1) jollekin vakiolle. Mutta vakio on alkuehdon määräämä, joten $y \equiv x$.

Epähomogeeninen dys 2

Lause

Epähomogeenisen alkuarvoprobleeman $x' = Ax + b, \; x(0) = a$ yksikäsitteinen ratkaisu on

$$x(t) = e^{tA}a + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}b(s)ds = e^{tA}a + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds. \quad (\star)$$

Viimeinen muoto $(\star)$ on merkillepantava; se on ohjausfunktion $b(t)$ ja matriisieksponentin e^{tA} **konvoluutiotulo**.

Esimerkki 1: Tarkastellaan epähomogeenista systeemiä, jossa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Aiemmin on laskettu matriisieksponentti (ilman $-s$ tekijää)

$$e^{-sA} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}, \quad \text{josta}$$

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} s\sin s \\ s\cos s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \sin t - t\cos t \\ \cos t + t\sin t - 1 \end{pmatrix}.$$

Epähomogeeninen dys 3

Koska

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

niin alkuehdolla $a = (a_1, a_2)^T$ lopulta

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA} \left\{ \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\} = \cdots \\ &= \begin{pmatrix} -t + a_1 \cos t + (1 - a_2) \sin t \\ 1 - (1 - a_2) \cos t + a_1 \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tarkistus: $x(0) = \begin{pmatrix} -0 + a_1 \cos 0 + (1 - a_2) \sin 0 \\ 1 - (1 - a_2) \cos 0 + a_1 \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a$, täsmää!

Vastaavan homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisu saadaan sivutuotteena:

$$e^{tA} a = \begin{pmatrix} a_1 \cos t - a_2 \sin t \\ a_1 \sin t + a_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Mitä merkitsee homogeenisen ratkaisun kannalta se, että $(*)$ näyttää olevan aiemmin nähty kiertomatriisi $K(t)$?

Dys kvalitatiivisesti 1 (Kreyszig 4.3)

Differentiaaliyhtälösysteemin määrittelemiä pisteitä, joille $x' = 0$, kutsutaan **kriittisiksi pisteiksi**. Lineaaristen, vakiokertoimisten, homogeenisten systeemien ainoa kriittinen piste on origo. Tutkitaan seuraavaksi yksinkertaisimman tälläisen systeemin ratkaisujen käyttäytymistä **faasitasossa** kriittisen pisteen ympäristössä.

Määritelmä

Olkoon A reaalinen 2×2 matriisi spektrillä $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Systeemin $x' = Ax$, kriittinen piste, origo, on

1. **satulapiste**, *jos* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ *ja* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,
2. **nielu**, *jos* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ *ja* $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$,
3. **lähde**, *jos* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ *ja* $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$,
4. **spiraalinielu (spiraalilähde)**, *jos* $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, $b \neq 0$ *ja* $a < 0$ $(a > 0)$. *Jos* $a = 0$ *on origo* **keskus**.

Dys kvalitatiivisesti 2 (Kreyszig 4.3)

Huomioita: Puretaan Määritelmän tapaukset.
1. A diagonalisoituu eli $A = TDT^{-1}$. Siten muunnoksella $x = Ty$ voidaan siirtyä y-koordinaatteihin, joissa yhtälö on muotoa $y' = T^{-1}ATy = Dy$. Tämä vastaa kahta riippumatonta differentiaaliyhtälöä! Niiden analyysi on siis skalaariteoriaa ja välittömästi ratkaisu $y = \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}\right)^T$ $(*)$, josta ominaisarvojen merkkien mukaan $t \to \infty \Rightarrow y_1 \to 0$ ja $y_2 \to \infty$, ja $t \to -\infty \Rightarrow y_1 \to \infty$ ja $y_2 \to 0$. Tälläinen **satulapiste** on **kaoottisen dynamiikan** arkkityyppi; systeemi on yhteen ominaissuuntaan kontraktio ja toiseen ekspansio. Tästä seuraa äärimmäinen herkkyys alkudatalle.

2. Jos A diagonalisoituu, niin ratkaisukaava on kuten $(*)$ yllä. Jos $t \to \infty$, lähestyvät kaikki ratkaisut asymptoottisesti origoa, siitä termi **nielu**. Toisinaan erotellaan vielä alatyypit **polttopiste**, jos $\lambda_1 = \lambda_2$ ja **solmu**, jos ominaisarvot ovat erilliset.

Jos A ei diagonalisoidu, niin voidaan osoittaa, että välttamättä $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ja $A \sim B$, $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $b \neq 0$. Edeltävän nojalla $e^{tB} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, joten

$$y = e^{tB} a = e^{\lambda t} \left(\begin{array}{c} a_1 + a_2 bt \\ a_2 \end{array} \right) = e^{\lambda t} \left(\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right) + te^{\lambda t} \left(\begin{array}{c} a_2 b \\ 0 \end{array} \right).$$

Tämä tapaus on **degeneroitunut nielu**, jossa mielenkiintoista on viimeisen termin lisäkontribuutio dynamiikkaan.

3. Lähde alatapauksineen on analoginen nielun kanssa ja analysoidaan täsmälleen samoin kuin kohta 2. Nyt ratkaisut etääntyvät origosta kun t kasvaa. Voidaankin ajatella, että kohdat 2. ja 3. saadaan toisistaan kääntämällä ajan suunta: $t \to -t$ kaavoissa.

4. Kun realisella matriisilla on kompleksinen ominaisarvo, on myös tämän liittoluku aina ominaisarvo. Nyt $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ ja 2×2 systeemi voidaan kannanvaihdolla saattaa muotoon

$$y' = By = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} y,$$

josta edelleen

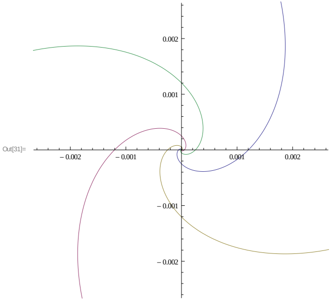
$$e^{tB} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} .$$

Matriisi yllä on selvästi kierto, ortogonaalinen matriisi, joka ei siis muuta kertomiensa vektorien pituutta. Siten tekijä e^{at} yksin määrää, kulkeeko dysin ratkaisu kohti origoa ($a < 0$) vai etääntyykö se origosta ($a > 0$). Tämä yhdistettynä kiertoon, joka on mukana täsmälleen silloin kun $b \neq 0$, johtaa siis **spiraalidynamiikkaan**. Näiden rajalla saadaan **keskustapaus**, $a = 0$, joka on siis puhdas kierto origon ympäri.

Esimerkki 1: Olkoon $y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} y$. Kerroinmatriisin spektri on $-1 \pm i$, joten matriisieksponentin avulla saadaan spiraalinieluratkaisu

$$y = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} .$$

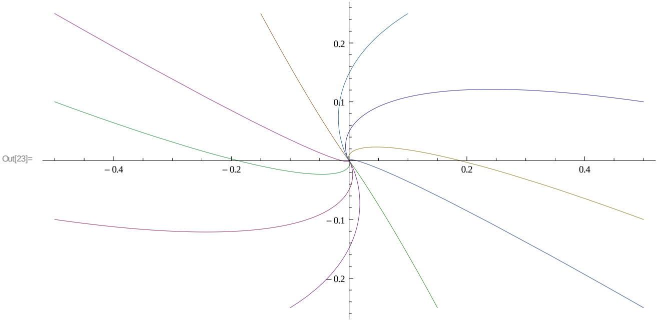
Alla ratkaisukäyrät origon ympäristössä neljästä eri alkupisteestä. Huomaa kiertosuunta! Se on nyt myötäpäivään, koska $b < 0$.



Systeemi on ratkaistu Kreyszigissä vaihtoehtoisella menetelmällä.

Esimerkki 2: Olkoon
$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y \, .$$
Kerroinmatriisin ainoa ominaisarvo on 3, joten kyseessä on jonkinlainen lähde. Matriisille löytyy vain yksi ominaisvektori, joten diagonalisoiminen ei onnistu. Se on kuitenkin similaari Jordan matriisin kanssa: $A = TJT^{-1}$, jossa
$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$
Systeemin $z' = Jz$ (koordinaatistonmuunnos on siis $y = Tz$) ratkaisu on $z(t) = e^{tJ}a$. Matriisieksponentiksi saadaan "idempotenttimenetelmällä"
$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{\begin{pmatrix} 3t & t \\ 0 & 3t \end{pmatrix}} = e^{\left(3tI + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)} \\ &= e^{3t}\left(I + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{joten} \\ e^{tA} &= Te^{tJ}T^{-1} = \cdots = e^{3t}\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} . \end{aligned}$$
Tämä tapaus on esimerkki degeneroituneesta lähteestä.

Alkuperäisen systeemin (siis y-koordinaateissa) kahdeksan ratkaisukäyrää:



Kuvan "epäsymmetrialla" on syynsä: ominaisarvoa 3 vastaava ominaisvektori on $(1, -1)^T$, jonka suuntaisiksi kaikkien ratkaisujen on taivuttava origon läheisyydessä. Ymmärrätkö miksi?

Tämäkin on ratkaistu Kreyszigissä, (sekavalla) vaihtoehtoisella menetelmällä.

Esimerkki, 3d.: Tarkastellaan homogeenista systeemiä $x' = Ax$, jossa

$$A = \begin{pmatrix} -14 & -160 & -40 \\ 181 & 5 & 2 \\ 96 & 84 & 18 \end{pmatrix}.$$

Tämä voidaan saattaa ominaiskannan avulla huomattavasti helpommin ymmärrettävään muotoon. *Mathematicalla*:

```
In[73]:= a = {{-14, -160, -40}, {181, 5, 2}, {96, 84, 18}};

In[74]:= Eigensystem[a]

Out[74]= {{6 + 180 i, 6 - 180 i, -3}, {{-1 + i, 1 + i, 1}, {-1 - i, 1 - i, 1}, {0, -1, 4}}}

In[75]:= e = {{-1 + i, 1 + i, 1}, {-1 - i, 1 - i, 1}, {0, -1, 4}}

Out[75]= {{-1 + i, 1 + i, 1}, {-1 - i, 1 - i, 1}, {0, -1, 4}}

In[76]:= p = Transpose[{Re[e[[1]]], Im[e[[1]]], e[[3]]}]

Out[76]= {{-1, 1, 0}, {1, 1, -1}, {1, 0, 4}}

In[79]:= MatrixForm[ Inverse[p].a.p ]

Out[79]//MatrixForm=
```

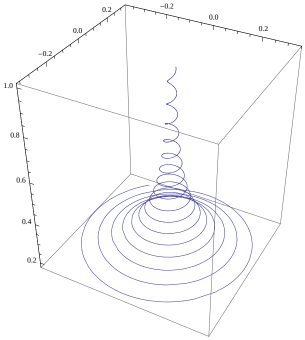
$$\begin{pmatrix} 6 & 180 & 0 \\ -180 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Siten uusissa koordinaateissa

$$y' = \begin{pmatrix} 6 & 180 & 0 \\ -180 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y \ ,$$

josta nähdään, että viimeinen komponentti on nyt riippumaton kahdesta ensimmäisestä. Nämä taas käyttäytyvät selvästi 2d spiraalidynamiikan mukaisesti parametreilla $a = 6$ ja $b = -180$. Radat ovat 3d laajenevia spiraaleja, jotka "litistyvät" kahden ensimmäisen komponentin määräämään tasoon kolmannen komponentin lähestyessä eksponentiaalisesti nollaa.

Out[6]=



Dys kvalitatiivisesti 9

Stabiilisuus 1 (Kreyszig 4.4)

Yleisen n-ulotteisen homogeenisen differentiaaliyhtälösysteemin $x' = f(x),\ x \in \mathbf{R}$ kriittiset pisteet x^* ovat täsmälleen yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisut.

Määritelmä

- *Kriittinen piste x^* on* **stabiili**, *jos jokainen ratkaisu $x(t)$, joka saapuu (t:n kasvaessa) johonkin x^*:n avoimeen ympäristöön, pysyy sellaisessa kaikkina myöhempinä aikoina.*
- *Jos x^* ei ole stabiili on se* **epästabiili** *kriittinen piste.*
- *Jos pätee, että jokainen ratkaisu, joka saapuu x^*:n johonkin avoimeen ympäristöön, itse asiassa lähestyy x^*:aa, sanotaan, että tämä kriittinen piste on* **asymptoottisesti stabiili**.

Avoimen ympäristön sijaan voidaan usemmiten ajatella avointa, x^*-keskistä kiekkoa. Asymptoottinen stabiilisuus on huomattavasti vahvempi ominaisuus kuin stabiilisuus.

Stabiilisuus 2 (Kreyszig 4.4)

Esimerkki: Lineaarisen vakiokertoimisen systeemin ainoa kriittinen piste on origo.

- Kaikki nielut spiraalilla tai ilman ovat asymptoottisesti stabiileja, kun taas kaikki lähteet ovat epästabiileja.
- Satulapisteet ovat epästabiileja, koska ratkaisu pakenee äärettömyyteen ekspansiivisessa suunnassa.
- Keskusdynamiikka on esimerkki stabiilista dynamiikasta, joka ei ole asymptoottisesti stabiilia.
- Edelläkuvattu 3d esimerkki on epästabiili.

2d dys synteesi 1 (Kreyszig 4.4)

Edellä olevat kvalitatiiviset luokat 2d systeemille $x' = Ax$ saadaan hahmotettua käyttökelpoisella "uudelleenparametrisoinnilla". Kun huomataan, että

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$
$$= \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A \ ,$$

jossa Tr on **matriisin jälki**, niin karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = 0$ ratkaisu on

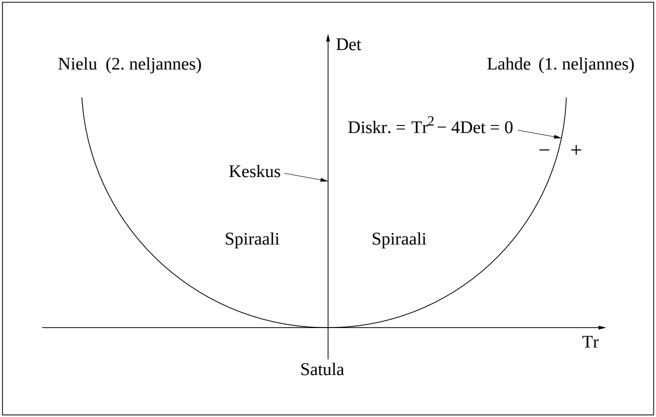
$$\lambda_{\pm} = \frac{Tr(A) \pm \sqrt{(Tr(A))^2 - 4 \det A}}{2} \ .$$

Huomaa, että

$$\det A = \lambda_+ \lambda_- \quad \text{ja} \quad Tr(A) = \lambda_+ + \lambda_- \ .$$

2d dys synteesi 2 (Kreyszig 4.4)

Jäljellä ja determinantilla parametrisoituna edeltävät dynamiikan tyypit sijoittuvat seuraavasti:



Stabiileja ovat täsmälleen toisen neljänneksen systeemit.

Linearisointi 1 (Kreyszig 4.5)

Epälineaarisen systeemin $x' = f(x),\ x \in \mathbf{R}^n$ **autonomisuus** tarkoittaa sitä, että f ei riipu eksplisiittisesti ajasta. Systeemin analyysissä on apua erään lineaarisen systeemin tuntemuksesta.

Määritelmä

Tason epälineaarisen systeemin $x' = f(x)$ **linearisointi** *kriittisessä pisteessä* x^* *on systeemi* $x' = Ax$*, jossa kertoimena on* **Jacobin** *matriisi*

$$A = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right) \Bigg|_{x=x^*}.$$

Linearisointi perustuu siihen, että riittävän säännöllinen (vähintään differentioituva) vektorifunktio $f = (f_1, f_2)$ voidaan Taylor-kehittää kriittisessä pisteessä

$$f(x) = f(x^*) + Df(x^*)(x - x^*) + \cdots = Df(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*),$$

jossa Df on Jacobin matriisi ja viimeisin termi on häviävän pieni riittävän lähellä x^*:ää ($g(t) = o(t^k)$ tarkoittaa, että $\frac{g(t)}{t^k} \to 0$ kun t menee rajalleen). Ax on siis se lineaarisista funktioista, joka muistuttaa eniten kuvausta f pisteen x^* ympäristössä.

Lause

Mikäli systeemin $x' = f(x)$ kriittinen piste x^* on eristynyt, f riittävän säännöllinen, $\det A \neq 0$, *A:n ominaisarvot erilliset, eivätkä puhtaan imaginaariset, on linearisoinnin $x' = Ax$ tyyppi origossa sama kuin alkuperäisen systeemin pisteessä x^*.*

Todistus ei ole aivan yksinkertainen, löytyy kirjallisuudesta.

Epälineaarista dynamiikkaa 1 (Kreyszig 4.5)

Esimerkki 1: Lotka-Volterra-malli on klassinen esimerkki epälineaarisesta systeemistä. Se on alunperin populaatiomalli, ns. saalis-saalistaja-malli, mutta sovellutuksia on moneen muuhunkin yhteyteen, jossa muuttujien *yhteenkombinoituminen* on oleellista.

Alkuperäisessä muodossan y_1 ja y_2 ovat kanien ja kettujen määrät jollakin laajalla, mutta suljetulla alueella (ei populaatioiden nettovirtausta ulos, eikä sisään). Tällöin voidaan keskinäiset riippuvuudet perusmuodossaan kuvata yhtälöin

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2) = ay_1 - by_1y_2 \\ y_2' = f_2(y_1, y_2) = ky_1y_2 - ly_2 \end{cases}$$

jossa a, b, k ja l ovat posittiivisia vakioita. Ristitermi y_1y_2 kuvaa kettujen ja kanien kohtaamisten määrää, joissa siis kanikanta kärsii ja kettukanta saa kasvuvoimaa. Oletuksena on, että kaneilla on rajattomasti kasviksia, muita petoja ei ole ja ketut syövät vain kaneja.

Systeemin kriittiset pisteet ovat $(0, 0)$ ja $\left(\frac{l}{k}, \frac{a}{b}\right)$. Origion kohdalla linearisointi johtaa matriisiin

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{y_1=y_2=0} = \begin{pmatrix} a - ky_2 & -by_1 \\ ky_2 & ky_1 - l \end{pmatrix}\Bigg|_{y_1=y_2=0} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -l \end{pmatrix}$$

Epälineaarista dynamiikkaa 2 (Kreyszig 4.5)

Tämän ominaisarvoille pätee selvästi $\lambda_- = -l < 0 < a = \lambda_+$, joten kyseessä on satulapiste. Aiemmin esitetyn teorian nojalla (Lause Linearisointi 2 -kalvolla) tämä päätelmä pätee myös epälineaarisen systeemin kriittiselle pisteelle.

Onko tulos järkeenkäypä? Systeemi voidaan "häiritä" pois origosta kahdella kvalitatiivisesti hyvin erilaisella tavalla. Jos alkutila $y_1(0)$ on positiivinen, mutta pieni ja $y_2(0) = 0$, on seurauksena on kanien väestöräjähdys, koska harventavaa kettupopulaatiota ei ole. Tämä on faasiavaruuden ekspansiivinen suunta. Jos taas $y_1(0) = 0$ eli kaneja ei ole ja $y_2(0)$ on positiivinen luku, kuolee kettupopulaatio nälkäänsä pois. Tämä on faasiavaruuden kontraktiivinen suunta. Origon läheisyydessä dynamiikka on siis äärimmäisen herkka pienille populaationvaihteluille.

Toinen kriittinen piste kannattaa ensin siirtää origoon siirtymällä uusiin muuttujiin: $y_1 = u_1 + \frac{l}{k}$, $y_2 = u_2 + \frac{a}{b}$. Systeemi on silloin

$$\begin{cases} u_1' = \left(u_1 + \dfrac{l}{k}\right)(-bu_2) \\ u_2' = \left(u_2 + \dfrac{a}{b}\right) ku_1 \end{cases}$$

Linearisoimalla tämä nyt origossa saadaan systeemin $u' = A_1 u$ kerroinmatriisiksi

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bl}{k} \\ \frac{ak}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Epälineaarista dynamiikkaa 3 (Kreyszig 4.5)

jonka spektri on $\pm i\sqrt{al}$. Lineaarisella systeemilla on siis keskusdynamiikka, mutta edeltävä teoria (Lause Linearisointi 2 -kalvolla) ei implikoi tätä päätelmää alkuperäiselle systeemille. Tämä on kuitenkin osoitettavissa todeksi systeemin tarkemmalla analyysilla.

Huomaa, että systeemin $u' = A_1 u$ yhtälöt voidaan kertoa ristiin, jolloin saadaan

$$\frac{ak}{b} u_1 u_1' = -\frac{bl}{k} u_2 u_2',$$

josta edelleen integroimalla

$$\frac{ak}{b} u_1^2 + \frac{bl}{k} u_2^2 = \text{vakio}.$$

Nämä käyrät, ellipsit, ovat populaatioiden syklistä vaihtelua kuvaavia jaksollisia ratoja. Kiertosuunta on vastapäivään, miksi?

Tässä esimerkissä populaatioiden dynaaminen tasapaino edellyttää, että pysytään "kauhun tasapainossa" eli keskusdynamiikassa. Jos systeemi poikkeaa siitä, lineaarinen teoria viittaa siihen, että joudutaan joko spiraalinieluun ("kaikkien lajien sukupuutto") tai spiraalilähteeseen ("rajaton kasvu", epärealistinen skenaario maailmassa, jossa on vain äärellinen määrä resursseja).

Epälineaarista dynamiikkaa 4

Esimerkki 2: Tarkastellaan tason epälineaarista systeemiä

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) = x + 4y - x^3 - xy^2 \\ y' = f_2(x,y) = -4x + y - x^2y - y^3 \ . \end{cases}$$

Pienellä päättelyllä voi todeta, että ainoa kriittinen piste on origo. Jacobin matriisi origossa on

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{array} \right) \Bigg|_{x=y=0} = \left(\begin{array}{cc} 1-3x^2-y^2 & 4-2xy \\ -4-2xy & 1-x^2-3y^2 \end{array} \right) \Bigg|_{x=y=0} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{array} \right) .$$

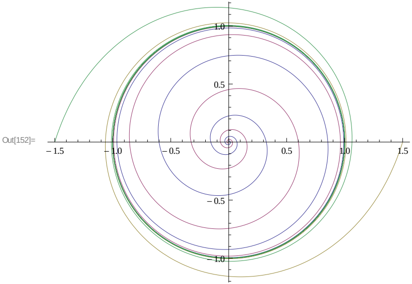
Tämän ominaisarvot ovat $1 \pm 4i$, joten kyseessä on spiraalilähde.

Huomaamalla, että $f_1(x,y) = (1-x^2-y^2)x + 4y$ ja $f_2(x,y) = -4x + (1-x^2-y^2)y$ saattaa alkaa epäillä, että yksikköympyrällä $x^2 + y^2 = 1$ on jotain erityistä merkitystä. Sillä alkuperäinen systeemi yksinkertaistuu muotoon

$$\left(\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) ,$$

jossa kerroinmatriisin spektri on $\pm 4i$. Siten on pääteltävissä, että yksikköympyrä on systeemin **jaksollinen rata**.

Origo on siis lähde ja osoittautuukin, että jaksollinen rata $x^2 + y^2 = 1$ on itse asiassa attraktiivinen sisältä. Lisäargumentilla voidaan osoittaa, että samoin on ulkopuolelta, joten yksikköympyrä on itse asiassa **rajasykli**.



Neljä myötäpäivään ($b = -4 < 0$) kiertävää spiraalirataa, jotka lähestyvät rajasykliä.

Kuuluisa **van der Polin** yhtälö, $y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0, \ \mu > 0$ vakio, saatettuna kahden epälineaarisen (kolmannen asteen polynomeja) differentiaaliyhtälön muotoon, on lähisukulainen. Silläkin systeemillä on rajasykli (joka liittyy elektronisten piirien värähtelyihin; analyysiä näistä löytyy Kreyszigistä & erikoisteoksista).