Matemaattisessa analyysissa on usein käyttökelpoista soveltaa **integraalimuunnoksia**. Yksi tärkeimmistä on Laplace-muunnos.

Määritelmä

$\mathbf{R}_+$*:lla määritellyn, riittävän säännöllisen funktion f* **Laplace-muunnos** *on*

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \quad s > s_0$$

ja sen **Laplace-käänteismuunnos** $\mathcal{L}^{-1}$: $\mathcal{L}^{-1}(F) = f(t)$.

Lause

Laplace muunnos on lineaarinen operaatio:

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Tod.: Integrointi on lineaarinen operaatio. QED

Lause

Laplace-muunnoksen **s-siirros**: $\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right) = F(s-a), \; s > s_0 + a.$

Tod.:

$$\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right) = \int_0^\infty e^{-st}\left(e^{at}f(t)\right)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a).$$

$F(s)$:n ehto $s > s_0$, implikoi olemassaoloehdon $s > s_0 + a$. QED

Esimerkkejä:

- $\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}1dt = \frac{1}{s}, \; s > 0.$
- $\mathcal{L}(t^n) = \left(-\frac{1}{s}e^{-st}t^n\right)\Big|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}(t^{n-1})$, joten induktiolla tästä $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^n}\mathcal{L}(1) = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0.$
- $\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{s-a}, \; s > a$ (tai edellisen kohdan ja ylläolevan Lauseen avulla).
- $\mathcal{L}(\cosh(at)) = \mathcal{L}(\frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}, \; s > |a|.$
- $\mathcal{L}(\sinh(at)) = \mathcal{L}(\frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}, \; s > |a|.$

Laplace-muunnos, olemassaolo (Kr. 6.1)

Lause

Jos f on paloittain jatkuva ja toteuttaa ehdon $|f(t)| \leq Ce^{ct}$, $\forall t \in \mathbf{R}_+$ joillekin positiivisille vakioille, c ja C, on Laplace-muunnos $\mathcal{L}(f)$ olemassa kaikille $s > c$.

Tod.

$$|\mathcal{L}(f)| = \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-st} Ce^{ct} dt = \frac{C}{s-c}.$$

Ehto $s > c$ takaa viimeisen integraalin olemassaolon. QED

Tämä on vain riittävä ehto olemassaololle.

Esimerkki: $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ on olemassa, sillä sijoituksella (1) $st = x, \; s > 0$ saadaan

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-st} dt \overset{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \overset{(2)}{=} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{s}},$$

jossa (2):ssa on käytössä sijoitus $x = u^2$ ja symmetria origon suhteen.

Laplace-muunnos, t-siirros (Kr. 6.3)

Heavisiden porrasfunktio on $1_b(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq b \\ 1 & , t > b \end{cases}$. Nyt $b > 0$.

Lause

Laplace-muunnoksen **t-siirros**: $\mathcal{L}(1_b(t)f(t-b)) = e^{-sb}F(s)$.

Tod.: Muuttujanvaihdolla $u = t - b$ saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(1_b(t)f(t-b)) &= \int_b^\infty e^{-st} f(t-b)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+b)} f(u)du = e^{-sb}F(s). \end{aligned}$$

QED

Esimerkki: "Pulssifunktion" $1_{b_1}(t) - 1_{b_2}(t)$, $b_2 > b_1 > 0$ Laplace-muunnos on

$$\mathcal{L}(1_{b_1}(t) - 1_{b_2}(t)) = (e^{-sb_1} - e^{-sb_2})\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}(e^{-sb_1} - e^{-sb_2}).$$

Tämä, kuten Heavisiden funktiokin, on kätevä säätöteoriassa tärkeän "bang-bang" ohjauksen formuloinnissa.

Laplace-muunnos, derivointi (Kr. 6.6)

Derivoimalla ja integroimalla (analyysin standardirajoituksin) Laplace-muunnosta saadaan käyttökelpoisia tuloksia:

Lause

$$F'(s) = -\mathcal{L}(tf(t)) \quad \text{ja} \quad \int_s^\infty F(u)du = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right).$$

Esimerkki:

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2}, \ \dots \ , \mathcal{L}\left(\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}\right) = \frac{1}{(s-a)^n}$$

iteroimalla Lausetta. Samaan tapaan voidaan johtaa esimerkiksi

$$\mathcal{L}(t\sin(\omega t)) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

Tällaiset tulokset ovat hyödyllisiä esimerkiksi lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen värähtelymoodien karakterisoinnissa.

Laplace-muunnos, konvoluutio 1 (Kr. 6.5)

Määritelmä

Funktioiden $f, g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ **konvoluutio** *määritellään kun* $t \geq 0$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du \ .$$

Konvoluutio $*$ on (eksoottisemman näköinen) funktioiden tulo kuten tavanomainen **pisteettäinen** tulo $f(t)g(t)$. Se voidaan määritellä myös muilla tavoin, esimerkiksi Fourier-analyysissä reaaliakselilla käyttökelpoisin muoto on

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Konvoluutiolla on erinomainen ominaisuus, joka paljastuu sitä vastaavassa integralimuunnoksessa, nyt Laplace-muunnoksessa.

Lause

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s) = F(s)G(s)\ .$$

Tod.:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(u)g(t-u)dudt \\
&= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt \quad \text{(Fubinin lause)} \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} f(u)g(t-u)dtdu \\
&= \int_0^\infty f(u)\left\{\int_u^\infty e^{-st} g(t-u)dt\right\} du \quad (t-u=w) \\
&= \int_0^\infty f(u)e^{-su}\left\{\int_0^\infty e^{-sw} g(w)dw\right\} du = F(s)G(s)\ .
\end{aligned}$$

QED

Konvoluutio on siis tulo funktioavaruudessa, jolle

- pätee assosiatiivisuus, $f * (g * h) = (f * g) * h$ ja vaihdannaisuus: $f * g = g * f$,
- on olemassa yksikköalkio δ: $f * \delta = f$.

Edeltävän Lauseen nojalla siis $\mathcal{L}(\delta) = 1$. Tämä **Diracin delta**, impulssifunktio, on ns. distribuutio eli "yleistetty funktio". Se määritellään

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{jos } t = a \\ 0 & \text{jos } t \neq a \end{cases}$$

lisävaatimuksella, että $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = 1$ kaikille $a \in \mathbf{R}$. Delta on siis yksikkömassa keskittyneenä yhteen pisteeseen.

Esimerkki: $\mathcal{L}(\delta(t-a)) = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t-a)dt = e^{-as}\int_0^{\infty}\delta(t-a)dt = e^{-as}$ ja $\mathcal{L}(1_a(t)) = \frac{e^{-as}}{s}$, $a > 0$. Formaalisti $\mathcal{L}(1_a') = s\mathcal{L}(1_a) - 1_a(0) = e^{-as}$, joten nähdään, että Diracin delta käyttäytyy kuten Heavisiden derivaatta, ainakin integraaleissa.

Laplace-muunnos, derivaatan 1 (Kr. 6.2)

Lause

Funktion f derivaatan muunnos: $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$. *Yleisesti*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Määrätyn integraalin muunnos: $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$

Tod.: Osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt &= \lim_{u\to\infty} e^{-su}f(u)\Big|_0^u - \int_0^\infty (-s)e^{-st}f(t)dt \\ &= \lim_{u\to\infty} e^{-su}f(u) - e^{-s\cdot 0}f(0) + s\mathcal{L}(f).\end{aligned}$$

$\lim_{u\to\infty} e^{-su}f(u) = 0$ kun $s > 0$ ja f integroituva. Iteroimalla argumenttia n kertaa saadaan yleinen kaava.
Integraalikaava seuraa, kun määrittelee $g(t) = \int_0^t f(u)du$, jolle pätee $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g') = s\mathcal{L}(g) - g(0) = s\mathcal{L}(g)$. QED

Laplace-muunnos, derivaatan 2 (Kr. 6.2)

Esimerkki: Olkoon $f(t) = \cos(\omega t)$. Siten $f'(t) = -\omega \sin(\omega t)$ ja $f''(t) = -\omega^2 \cos(\omega t)$. Toisaalta edellisen nojalla

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \mathcal{L}(f'') &= s^2 \mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}(\cos(\omega t)) - s\cos(\omega \cdot 0) + \omega \sin(\omega \cdot 0) \\ &= s^2 \mathcal{L}(\cos(\omega t)) - s + 0. \end{aligned}$$

Tästä voidaan välittömästi ratkaista $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
Identtisellä argumentilla

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Laplace-muunnoksella voidaan siis vaihtaa vaikea operaatio, derivointi, yksinkertaiseksi, kertomiseksi s:llä! Tällä on useita tärkeitä sovellutuksia.

Laplace-muunnos, differentiaaliyhtälön 1 (Kr. 6.2)

Esimerkki 1: Lineaarinen, vakiokertoiminen, epähomogeeninen toisen asteen yhtälö

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t), \;\; a, b \in \mathbf{R}$$

Laplace-muuntuu

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + a(sY(s) - y(0)) + bY(s) = G(s),$$

josta edelleen merkinnällä $Q(s) = \frac{1}{s^2+as+b}$ ja $R(s) = G(s) + (s+a)y(0) + y'(0)$

$$Y(s) = Q(s)R(s) \; . \tag{1}$$

Huomaa, että $y(0)$ ja $y'(0)$ ovat tällaisen yhtälön normaali alkuarvodata. Menetelmän menestyksellisyys kulminoituu siis tulolausekkeen (1) Laplace-käänteismuuntamisen mahdolliseen hankaluuteen.

Funktio $Q(s)$ yllä on esimerkki **siirtofunktiosta**. Siihen tiivistyy informaatio systeemin rakenteesta, joka on siis riippumaton alkudatasta ja ohjauksesta. Yhtälön ratkaisu on sen ja vain alkudatasta ja ohjauksesta riippuvan funktion $\mathcal{L}^{-1}(R)$ konvoluutio.

Esimerkki 2: Joskus käänteismuuntaminen sujuu hyvin helposti. Tarkastellaan seuraavaksi systeemiä

$$x'' + 2x = r(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$$

alkuarvoilla $x(0) = x'(0) = 0$. Laplace-muunnettuna ja ratkaistuna tämä on

$$X(s) = Q(r)R(s) = \frac{1}{s^2+2}R(s),$$

joten ratkaisu on funktioiden $q(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}t\right)$ ja $r(t)$:n konvoluutio. Siten kun $0 \leq t < 1$

$$\begin{aligned} x(t) = (q * r)(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \sin\left(\sqrt{2}(t-u)\right)du \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\sqrt{2}t\right)\right), \end{aligned}$$

kun taas välillä $1 \leq t$ (huomaa integraalin yläraja, johtuu r:stä!)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \sin\left(\sqrt{2}(t-u)\right)du \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\sqrt{2}(t-1)\right) - \cos\left(\sqrt{2}t\right)\right). \end{aligned}$$

Esimerkki 3: Ratkaistaan positiivisella reaaliakselilla yhtälö

$$x'' + 5x' + 6x = f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 6 \\ 0, & 6 \leq t \end{cases}$$

alkuarvoilla $x(0) = 0$ ja $x'(0) = 2$.

Tehtävän voi selvittää kuten edellä konvoluutiolla tai paloittain; ratkaista ensin välillä $0 \leq t \leq 6$ ja sen jälkeen ratkaista toistamiseen, ottamalla $x(6)$ ja $x'(6)$ uusiksi alkuarvoiksi välille $6 \leq t$.

Vaihtoehtoisesti voi huomata, että $f(t) = 3(1_0(t) - 1_6(t))$, joka muuntuu $F(s) = \frac{3}{s}(1 - e^{-6s})$. Laplace-muunnettuna yhtälö saa muodon

$$(s^2 + 5s + 6)X(s) = 2 + F(s),$$

josta

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)} - e^{-6s}\frac{3}{s(s+2)(s+3)} \\ &= \left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{s+3}\right) - e^{-6s}\left(\frac{1}{2s} - \frac{3}{2(s+2)} + \frac{1}{s+3}\right) . \end{aligned}$$

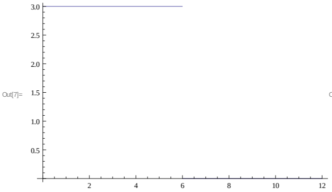
Laplace-muunnos, differentiaaliyhtälön 4

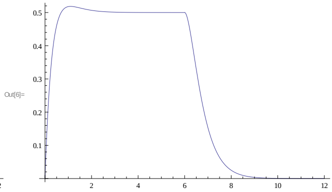
Kääntämällä tämä saadaan ratkaisuksi

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2(t-6)} + e^{-3(t-6)}\right) 1_6(t)$$

eli

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}, \ 0 \le t < 6 \\ \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\right) + \left(\frac{3}{2}e^{-2(t-6)} - e^{-3(t-6)}\right), \ 6 \le t \ . \end{cases}$$





Ohjausfunktion $f(t)$ ja differentiaaliyhtälön ratkaisun $x(t)$ kuvaajat.

Osamurtokehitelmistä 1 (Kr. 6.4)

Mikäli ohjausfunktion muunnos on polynomi, on ratkaisussa käänteismuunnettavana rationaalifunktio (polynomien osamäärä). Tällaisten kääntämiselle on oma tekniikkansa.

Osamurtokehitelmässä rationaalilauseke esitetään nimittäjän tekijöiden mukaan summamuodossa. Jos nimittäjässä kaikki juuret ovat reaalisia ja yksinkertaisia, on sen kehitelmä muotoa

$$\frac{1}{(s-a_1)(a-a_2)\cdots(s-a_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s-a_i}, \quad A_i \in \mathbf{R}.$$

Moninkertaista juurta vastaten kehitelmään lisätään termejä:

$$\frac{1}{(s-a_i)^{n_i}} \longmapsto \sum_{k=1}^{n_i} \frac{A_k}{(s-a_i)^k}.$$

Osamurtokehitelmistä 2 (Kr. 6.4)

Mikäli kehitettävänä on lauseke, jossa on muotoa $\frac{1}{s^2+a^2}$ olevia termejä, on ne esitettävä joko kuten edellä, mutta kompleksijuurten avulla,

$$\frac{C_1}{s-ia}+\frac{C_2}{s+ia},\ \ C_j\in\mathbf{C}\quad \text{tai muodossa}\quad \frac{As+B}{s^2+a^2},\ \ A,B\in\mathbf{R}.$$

Esimerkkejä:

$$\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-2)(s-1)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3}{s-2}+\frac{A_4}{s-1}$$

Kertomalla tämä auki ja vertaamalla s^k termien kertoimia, $k=0,\dots,3$, saadaan algebralliset yhtälöt, joista helposti: $A_1=3, A_2=2$ ja $A_3=A_4=-1$.

Vastaavalla tavalla s:n potenssit erottamalla voidaan yritteen

$$\frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}=\frac{B_1}{s+1}+\frac{B_2}{(s+1)^2}+\frac{B_3s+B_4}{s^2+4}$$

kertoimet ratkaista: $B_1=\frac{2}{25},\ B_2=\frac{1}{5},\ B_3=-\frac{2}{25}$ ja $B_4=-\frac{3}{25}$.

Differentiaaliyhtälöryhmän Laplace-muunnos 1 (Kr. 6.7)

Jokainen n:nnen kertaluvun lineaarinen, vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö voidaan sijoituksilla palauttaa n:n lineaaristen, vakiokertoimisten differentiaaliyhtälön ryhmäksi. Esimerkiksi edeltävät toisen asteen yhtälöt palautuvat kahden yhtälön ryhmiksi.

Esimerkki: Tutkitaan epähomogeenista systeemiä

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = Ay + g,$$

joka on Laplace-muunnettuna ($Y_i = Y_i(s) = \mathcal{L}(y_i)(s),\ G_i(s) = \mathcal{L}(g_i),\ i = 1, 2$)

$$\begin{cases} sY_1 - y_1(0) = a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + G_1 \\ sY_2 - y_2(0) = a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + G_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} y_1(0) + G_1 \\ y_2(0) + G_2 \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälöryhmä on siis muuttunut algebralliseksi yhtälöryhmäksi, joka ratkeaa, kun siirtofunktio on olemassa eli $sI - A$ ei ole singulaari (eli s ei ole A:n ominaisarvo).

Esimerkki: Tarkastellaan uudelleen systeemiä

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \ , \end{cases}$$

joka Laplace-muunnettuna saa muodon

$$\begin{cases} sY_1 - y_1(0) = -Y_1 + Y_2 \\ sY_2 - y_2(0) = -Y_1 - Y_2 \ . \end{cases}$$

Tämä on matriisimuodossa $A(s)Y(s) = y(0)$, jossa

$$A(s) = \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}, \quad Y(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} .$$

Koska

$$A^{-1}(s) = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}, \quad \det A = (s+1)^2 + 1,$$

saadaan ratkaisut muunnokset:

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2+1} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1(0)(s+1)+y_2(0)}{(s+1)^2+1} \\ \frac{y_2(0)(s+1)-y_1(0)}{(s+1)^2+1} \end{pmatrix} .$$

Esimerkki, jatkuu: Käänteismuuntaminen on nyt normaalia skalaarifunktioilla operoimista. Laplace-muunnoksen s-siirros säännöstä nähdään, että (s+1)-tekijä merkitsee käänteismuunnoksessa tekijää e^{-t}. Toisaalta on jo aiemmin laskettu, että

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \cos t \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t \ .$$

Siten lopullinen ratkaisu:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} y_1(0)\cos t + y_2(0)\sin t \\ y_2(0)\cos t - y_1(0)\sin t \end{pmatrix} .$$

Vertaa näitä (ja menetelmää!) aiemmin matriisieksponentilla johdettuihin ratkaisuihin.