

Kompleksilukujen historia alkoi yhtälönratkaisusta. Lineaarisella yhtälöllä on aina yksi ratkaisu, mutta jo toisen asteen yhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbf{R}$$

kohdalla neliöksi täydentäminen johtaa lausekkeeseen

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

jossa kriittistä roolia näyttelee **diskriminantti** $\Delta = b^2 - 4ac$. Jos se on negatiivinen, ei reaalisia juuria löydy. Kun määritellään **imaginaariyksikkö**, $i = \sqrt{-1}$, on yhtälöllä kaikilla kertoimien arvoilla kaksi ratkaisua ($\Delta = 0$ selvä rajatapaus: juuret yhtyvät kaksikertaiseksi). Tämä yleistyy (todistukseen palataan):

Algebran peruslause: Kompleksilukujen joukossa jokaisella n :nnen asteen polynomilla on tasan n juurta.

Määritelmä

Kompleksiluvun z **koordinaatti- ja napaesitykset** ovat

$$x + iy \quad \text{ja} \quad r(\cos \phi + i \sin \phi), \quad x, y, r, \phi \in \mathbf{R}.$$

x ja y ovat kompleksiluvun **reaali- ja imaginaariosat**, merkitään $\Re(z)$ ja $\Im(z)$.

Luvun z **itseisarvo eli modulus** on $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja **vaihekulma eli argumentti** on $\phi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Kompleksiluvun **liittoluku eli konjugaatti** on $\bar{z} = x - iy$.

Kompleksiluvun modulus on ei-negatiivinen ja sen **argumentin pääarvo**, merkitään $\text{Arg}(z)$, määritellään olevan välillä $(-\pi, \pi]$, jolloin se on yksikäsitteinen (kun $z \neq 0$).

Kompleksiluvut muodostavat **kompleksitason** eli **Gaussin tason**, merkitään $\mathbf{C}$, jonka vektoreita ne siis ovat. Huomaa, että $\mathbf{C} \neq \mathbf{R}^2$!

Kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku suoritetaan komponenteittain. Kertolasku- ja jakolaskukaavat:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Operaatiot $+$, $-$, $\cdot$, $/$ ovat kaikki vaihdannaisia ja liitännäisiä.

Kompleksitasossa pätee **kolmioepäyhtälö**: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Kompleksiluvuille pätee myös **eksponenttitesitys** $z = re^{i\phi}$, jossa $\phi = \text{Arg}(z) + in2\pi$, n mielivaltainen kokonaisluku. Kun valitaan $r = 1$ saadaan **Eulerin kaava**

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Tämä voidaan osoittaa esimerkiksi sarjakehitelmien avulla. Tästä seuraa edelleen **De Moivren kaava**:

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^m = e^{im\phi} = \cos m\phi + i \sin m\phi, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Esimerkki: 1. Olkoon $z_1 = 1 + i$ ja $z_2 = -2$. Silloin $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\arg(z_1) = \arctan 1/1 = \arctan 1 = \pi/4 + n2\pi$. Pääarvo siis: $\text{Arg}(z_1) = \pi/4$. Samoin $|z_2| = 2$ ja pääarvo $\text{Arg}(z_2) = \arctan(0/-2) = \arctan 0 = \pi$ (lue haara tarkasti!). Nyt $z_1 z_2 = -2 - 2i$, joten $|z_1 z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ja $\text{Arg}(z_1 z_2) = -3\pi/4$. Huomaa, että yleisestikin napaesityksessä tulo (ja jako) on helppoa:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad , \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.$$

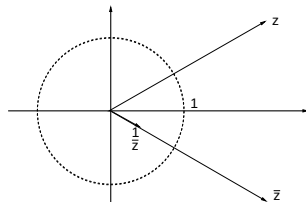
Esimerkki: 1. Olkoon $z_1 = 1 + i$ ja $z_2 = -2$. Silloin $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\arg(z_1) = \arctan 1/1 = \arctan 1 = \pi/4 + n2\pi$. Pääarvo siis: $\text{Arg}(z_1) = \pi/4$. Samoin $|z_2| = 2$ ja pääarvo $\text{Arg}(z_2) = \arctan(0/-2) = \arctan 0 = \pi$ (lue haara tarkasti!). Nyt $z_1 z_2 = -2 - 2i$, joten $|z_1 z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ja $\text{Arg}(z_1 z_2) = -3\pi/4$. Huomaa, että yleisestikin napaesityksessä tulo (ja jako) on helppoa:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.$$

2. Tarkastellaan vektoria $\frac{1}{z}$, $z \neq 0$. Koska

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{r^2} \bar{z}$$

ja koska konjugointi vain peilaa vektorin reaaliakselin suhteen, nähdään, että esim. yksikköympyrän ulkopuoliselle ($r > 1$) ensimmäisen kvadrantin kompleksiluvulle $\frac{1}{z}$ on kuvan mukainen. Selvästi yksikköympyrä kuvautuu itselleen.



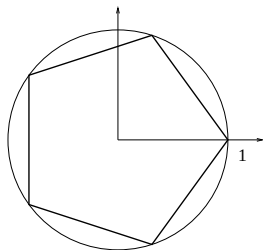
3. Kompleksitason ratkaisu yhtälölle $z^n - 1 = 0$ on nimeltään n :s **yksikköjuuri**. Niitä on siis n kappaletta. Koordinaattiesityksen avulla niiden löytäminen on työlästä, mutta napakoordinaattiesityksen avulla helppoa. Jos merkitään $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, saadaan De Moivren kaavan avulla vaatimukseksi

$$(*) \quad \begin{aligned} r^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)) &= 1 = \\ r^n(\cos(m2\pi) + i \sin(m2\pi)), & \quad m \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Koska $|\cos \theta + i \sin \theta| = 1, \forall \theta$, nähdään, että välttämättä $r = 1$. Yhtälön $(*)$ ratkaisut saadaan siis argumentin arvoilla

$$\phi = m \frac{2\pi}{n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Muilla m :n arvoilla saatavat ratkaisut yhtyvät näihin jaksollisuuden nojalla. Geometrisesti ne ovat siis säännöllisen n -kulmion kärjet.



Viidennet yksikköjuuret.

4. Onko olemassa ajanhetkeä, jolloin kolmiviisarisen kellon osoittimet ovat täsmälleen 120 asteen kulmassa toisiaan vastaan?

4. Onko olemassa ajanhetkeä, jolloin kolmiviisarisen kellon osoittimet ovat täsmälleen 120 asteen kulmassa toisiaan vastaan?

Olkoon t aika sekunneissa keskiyöstä eteenpäin, siten 12 tunnin jaksossa $0 \leq t < 43200 = 12 \cdot 60^2$. Sekunti-, minuutti- ja tuntiviisarien asemat ovat tällöin vastaavasti

$$e^{-i\frac{2\pi}{60}t}, \quad e^{-i\frac{2\pi}{60^2}t}, \quad \text{ja} \quad e^{-i\frac{2\pi}{12 \cdot 60^2}t}.$$

Tehtävän ehto on täsmälleen se, että nämä kompleksitason yksikkövektorit kumoavat toisensa:

$$(\star) \quad e^{-i\frac{2\pi}{60}t} + e^{-i\frac{2\pi}{60^2}t} + e^{-i\frac{2\pi}{12 \cdot 60^2}t} = 0.$$

Ottamalla käyttöön apumuuttuja $s = \frac{t}{12 \cdot 60^2}$ nähdään, että $0 \leq s < 1$ ja $(\star)$ voidaan muokata muotoon (tuntiviisari kiinnitetty, kellotaulu epäoleellisena pyörii)

$$\underbrace{e^{-i2\pi \cdot 719s}}_{\text{sekunti}} + \underbrace{e^{-i2\pi \cdot 11s}}_{\text{minuutti}} + \underbrace{1}_{\text{tunti}} = 0.$$

Minuuttiviisarilta vaaditaan siis että se on joko 120 astetta tuntiviisaria edellä: $11s = \frac{1}{3} + n$, tai 120 astetta jäljessä: $11s = \frac{2}{3} + n$. Näistä edelleen joko

$$s_n = \frac{1}{33} + \frac{n}{11} \quad \text{tai} \quad s'_n = \frac{2}{33} + \frac{n}{11}, \quad n = 0, 1, \dots, 10.$$

Siten ratkaisevaksi muodostuu nyt se, onko kummallakaan sekunttiviisarin ehdoista

$$719s_n = \frac{2}{3} + k \quad \text{tai} \quad 719s'_n = \frac{1}{3} + k$$

ratkaisua. Ekvivalentisti, onko millään yhtälöistä

$$719 \left(\frac{1}{33} + \frac{n}{11} \right) - \frac{2}{3} = k \quad \text{tai} \quad 719 \left(\frac{2}{33} + \frac{n}{11} \right) - \frac{1}{3} = k,$$

$n = 0, 1, \dots, 10$ kokonaislukuratkaisua k ?

Siten ratkaisevaksi muodostuu nyt se, onko kummallakaan sekunttiviisarin ehdoista

$$719s_n = \frac{2}{3} + k \quad \text{tai} \quad 719s'_n = \frac{1}{3} + k$$

ratkaisua. Ekvivalentisti, onko millään yhtälöistä

$$719 \left(\frac{1}{33} + \frac{n}{11} \right) - \frac{2}{3} = k \quad \text{tai} \quad 719 \left(\frac{2}{33} + \frac{n}{11} \right) - \frac{1}{3} = k,$$

$n = 0, 1, \dots, 10$ kokonaislukuratkaisua k ?

Ei ole. Manuaalisestikin tarkistettavissa, mutta esim. *Mathematicalla*:

```
In[1]:= Table [IntegerQ [719 (1 / 33 + n / 11) - 2 / 3], {n, 0, 10}]
Out[1]= {False, False, False, False, False, False, False, False, False, False}

In[2]:= Table [IntegerQ [719 (2 / 33 + n / 11) - 1 / 3], {n, 0, 10}]
Out[2]= {False, False, False, False, False, False, False, False, False, False}
```

Siten ratkaisevaksi muodostuu nyt se, onko kummallakaan sekunttiviisarin ehdoista

$$719s_n = \frac{2}{3} + k \quad \text{tai} \quad 719s'_n = \frac{1}{3} + k$$

ratkaisua. Ekvivalentisti, onko millään yhtälöistä

$$719 \left(\frac{1}{33} + \frac{n}{11} \right) - \frac{2}{3} = k \quad \text{tai} \quad 719 \left(\frac{2}{33} + \frac{n}{11} \right) - \frac{1}{3} = k,$$

$n = 0, 1, \dots, 10$ kokonaislukuratkaisua k ?

Ei ole. Manuaalisestikin tarkistettavissa, mutta esim. *Mathematicalla*:

```
In[1]:= Table [IntegerQ [719 (1 / 33 + n / 11) - 2 / 3], {n, 0, 10}]
Out[1]= {False, False, False, False, False, False, False, False, False, False, False}

In[2]:= Table [IntegerQ [719 (2 / 33 + n / 11) - 1 / 3], {n, 0, 10}]
Out[2]= {False, False, False, False, False, False, False, False, False, False, False}
```

Osaatko tulkita miksi pienellä variaatiolla saadaan “ratkaisu”:

```
In[4]:= Table [IntegerQ [719 (2 / 33 + n / 11) - 2 / 3], {n, 0, 10}]
Out[4]= {False, False, False, True, False, False, False, False, False, False, False}
```

5. Alkuluku on positiivinen kokonaisluku, joka on suurempi kuin yksi ja jonka ainoat tekijät ovat luku itse ja 1. Niitä on äärettömän monta (miksi?):

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \dots$$

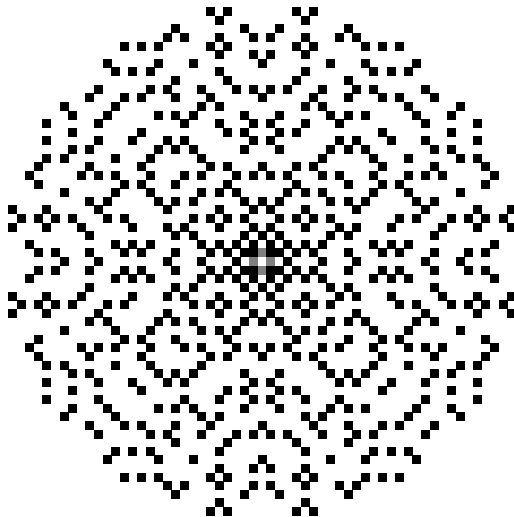
Ne ovat tavallaan atomeja, joista kaikki muut kokonaisluvut on tehty (joista taas tehdään osamäärillä rationaaliluvut, joista taas tehdään raja-arvolla reaalityluvut, joista taas tehdään imaginaariyksiköllä kompleksiluvut).

Kompleksitason kokonaisluvut ovat lukuja $z = n + im$, $n, m \in \mathbf{Z}$. Jos $m = 0$ on kompleksinen kokonaisluku tuttu reaalinen kokonaisluku. Kompleksisten kokonaislukujen joukossa **Gaussin alkuluvut** ovat lukuja, joilla ei ole muita alkutekijöitä kuin 1 ja itsensä kompleksisen kertolaskun alaisuudessa. Siten esim. $2 + 2i = 2(1 + i)$ ei ole Gaussin alkuluku, mutta $1 + i$ on. Koska kompleksisten kokonaislukujen joukko on paljon suurempi kuin reaalisten kokonaislukujen, eivät kaikki reaaliset alkuluvut ole enää Gaussin alkulukuja. Esimerkiksi reaalisista alkuluvuista

$$2 = (1 + i)(1 - i), \quad 5 = (2 + i)(2 - i), \quad 13 = (3 + 2i)(3 - 2i), \quad 17 = (4 + i)(4 - i), \dots$$

tulee kompleksitasossa jaollisia lukuja.

Myös Gaussin alkulukuja on äärettömän monta. Toisin kuin reaalisilla alkuluvuilla, niillä on symmetrioita ja siitä johtuen kaunis geometria. Niiden ominaisuudet ovat kuitenkin vielä haastavampia selvittää kuin reaalisten alkulukujen.

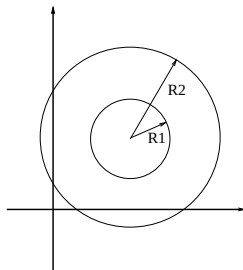


Vallihautaprobleema: Pääseekö origosta rajoitetuin hyppin äärettömyyteen?

Määritelmä

*Kompleksitason joukko on **avoin**, jos sen jokaisella pisteellä z_0 on ympärillään kiekko $\{z \mid |z - z_0| < \epsilon_0\}$, $\epsilon_0 > 0$, joka myös kuuluu joukkoon. Avoimen joukon komplementti on **suljettu**. Joukko on **(polku)yhtenäinen**, jos jokainen pistepari on yhdistettävissä toisiinsa käyrällä, joka kulkee joukossa. Avoin ja yhtenäinen joukko on **alue**. Alue on **yhdesti yhtenäinen**, jos jokainen suljettu käyrä voidaan siinä jatkuvalla kuvauksella kutistaa pisteeksi.*

Esimerkki: Avoin yksikkökiekko $\{z \mid |z| < 1\}$, sektori $\{z \mid \phi_1 < \text{Arg}(z) < \phi_2\}$ ja ylempi puolitaso $\{z \mid \text{Im}(z) > 0\}$ ovat alueita, jotka ovat lisäksi yhdesti yhtenäisiä. Annulus $\{z \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ on avoin ja yhtenäinen ja siten alue, mutta se ei ole yhdesti yhtenäinen.



Määritelmä

Kompleksitason kuvaus alueessa $D \subset \mathbf{C}$ on siinä määritelty kompleksiarvoinen funktio $f : D \rightarrow \mathbf{C}$. Sen koordinaattiesitys on

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

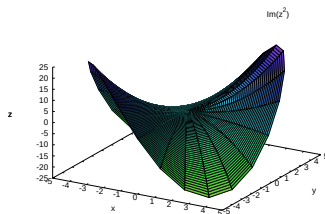
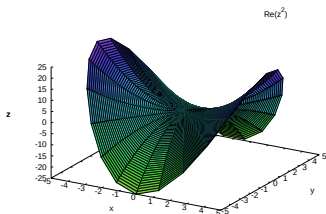
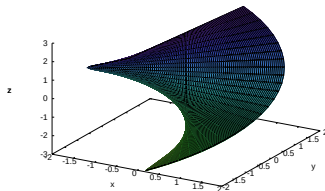
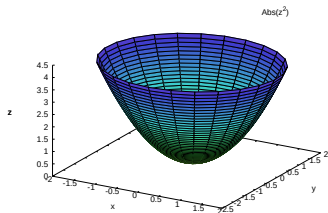
jossa u ja v ovat reaalisia D :ssa määritelyjä funktioita.

Kuvaus f on **jatkuva pisteessä** $z_0 \in D$, jos pätee

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

kaikkia D :n polkuja $z \rightarrow z_0$ pitkin. Funktio on **jatkuva alueessa** D , jos se on jatkuva jokaisessa sen pisteessä.

Esimerkki: $f(z) = z^2$ on kaikkialla kompleksitasossa määritelty funktio. Koska $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, nähdään, että $u(x, y) = x^2 - y^2$ ja $v(x, y) = 2xy$, jotka ovat selvästi kaikkialla $\mathbf{C}$:ssa määritellyt ja jatkuvat, joten niin on myös f .



z^2 : itseisarvo, vaihekulma, reaali- ja imaginaariosat.

Määritelmä

Kompleksitason funktio on f on derivoituva pisteessä z_0 jos

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

on olemassa kaikkia alueessa z_0 :aan kulkevia polkuja pitkin.

Esimerkkejä: 1. Jos edelleen $f(z) = z^2$, saadaan helposti

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

2. Jos taas $g(z) = \bar{z}$, nähdään, että

$$\frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} = \frac{[(x + \Delta x) - i(y + \Delta y)] - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Jos nyt ensin lähetetään $\Delta y \rightarrow 0$ ja sitten $\Delta x \rightarrow 0$, saadaan raja-arvoksi 1, mutta jos rajat otetaan käänteisessä järjestyksessä, saadaan erotusosamäärälle raja-arvo -1. Raja-arvo riippuu siis valitusta polusta, eikä $g(z)$ siten ole derivoituva missään.

Määritelmä

*Funktio on **analyttinen** määrittelyalueensa pisteessä z_0 , jos sillä on derivaatta z_0 :ssa ja jossain sen avoimessa ympäristössä. Funktio on analyttinen alueessa $D \subset \mathbf{C}$, jos se on analyttinen jokaisessa sen pisteessä. Koko $\mathbf{C}$:ssa analyttinen funktio on **kokonainen**.*

Määritelmä

*Funktio on **analyttinen** määrittelyalueensa pisteessä z_0 , jos sillä on derivaatta z_0 :ssa ja jossain sen avoimessa ympäristössä. Funktio on analyttinen alueessa $D \subset \mathbf{C}$, jos se on analyttinen jokaisessa sen pisteessä. Koko $\mathbf{C}$:ssa analyttinen funktio on **kokonainen**.*

Esimerkki: Monomit z^m , $m = 0, 1, 2, \dots$ ovat kokonaisia, argumentti kuten edellisessä esimerkissä. Koska erotusosamäärän ottaminen on lineaarinen operaatio, seuraa tästä, että kaikki polynomit ovat kokonaisia. Funktiot z^{-m} , $m = 1, 2, 3, \dots$ ovat analyttisiä kaikkialla muualla paitsi origossa (jossa ne eivät ole edes jatkuvia).

Määritelmä

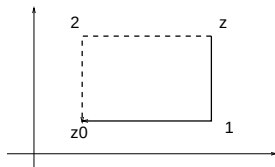
*Funktio on **analyttinen** määrittelyalueensa pisteessä z_0 , jos sillä on derivaatta z_0 :ssa ja jossain sen avoimessa ympäristössä. Funktio on analyttinen alueessa $D \subset \mathbf{C}$, jos se on analyttinen jokaisessa sen pisteessä. Koko $\mathbf{C}$:ssa analyttinen funktio on **kokonainen**.*

Esimerkki: Monomit z^m , $m = 0, 1, 2, \dots$ ovat kokonaisia, argumentti kuten edellisessä esimerkissä. Koska erotusosamäärän ottaminen on lineaarinen operaatio, seuraa tästä, että kaikki polynomit ovat kokonaisia. Funktiot z^{-m} , $m = 1, 2, 3, \dots$ ovat analyttisiä kaikkialla muualla paitsi origossa (jossa ne eivät ole edes jatkuvia).

Olkoon $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Polulla 1 antaa erotusosamäärä rajalla derivaatalle esityksen

$$(1) \quad f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$



Polulla 2 taas erotusosamäärä johtaa kaavaan

$$(2) \quad f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Analyttiselle funktiolle (1)&(2) ovat yhtäpitävät joten saadaan

Lause

*Kompleksifunktion $f = u + iv$ reaali- ja imaginaariosat toteuttavat kaikkialla analyyttisyysalueessa **Cauchy-Riemannin yhtälöt**:*

$$(C-R) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kääntäen, jos u :lla ja v :lla on jatkuvat osittaisderivaatat, jotka toteuttavat ylläolevat yhtälöt jossain alueessa D , on $f = u + iv$ analyyttinen D :ssä.

Jos tulkitaan $f : (x, y) \rightarrow (u, v)$ $\mathbf{R}^2$:n derivoituvana kuvauksena, jonka ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, on sen **Jacobin matriisi**

$$(*) \quad Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

hyvin määritelty. Jälkimmäinen esitys saadaan, kun merkitään $\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$ ja oletetaan, että Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat voimassa f :lle. Koska edelleen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ -\beta x + \alpha y \end{pmatrix},$$

nähdään, että Df :lla kertominen $\mathbf{R}^2$:ssa on täsmälleen sama operaatio kuin kompleksiluvulla $\alpha - i\beta$ kertominen $\mathbf{C}$:ssä (vertaa kalvon 3 kaavaan).

Jos merkitään $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, voidaan kirjoittaa ($\|\cdot\|$ on $\mathbf{R}^2$:n pituus)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - (\alpha - i\beta) \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \left\| \begin{pmatrix} u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) \end{pmatrix} - Df \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

kun $\Delta z \rightarrow 0$ eli analyttisyys voidaan osoittaa näin reaaliargumentilla.

Derivaatan olemassaolosta on kompleksifunktiolle huomattavasti kauaskantoisempia seurauksia, kuin reaalifunktiolle. Seuraavassa vain pari esimerkkiä:

Lause (Liouville)

Kokonainen funktio, jonka modulus on rajoitettu, on vakio.

(Todistukseen tarvitaan lisäteoriaa, tähän palataan kurssin lopulla.)

Lause

Jos f on analyyttinen alueessa D ja $|f|$ on vakio, on f vakio D :ssä.

Todistus: Yhtälö $u^2 + v^2 = c$, vakio, derivoituna antaa $2uu_x + 2vv_x = 0$ ja $2uu_y + 2vv_y = 0$, joista C-R-yhtälöillä ja kertomalla u :lla ja v :lla saadaan edelleen $u^2u_x - uvu_y = 0$ ja $uvu_y + v^2u_x = 0$. Näistä yhteenlaskemalla $(u^2 + v^2)u_x = 0$ ja $(u^2 + v^2)u_y = 0$. Jos $u^2 + v^2 = 0$, on asia selvä. Jos taas $u_x = 0 = u_y$, ovat u ja v ja siten myös f vakioita alueessa. QED

Osoittautuu, että analyyttisen funktion f derivaatta on myös analyyttinen (joten analyyttinen funktio derivoituu äärettömän monta kertaa). Siten myös funktioilla u ja v on kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat. Derivoimalla Cauchy-Riemannin yhtälöt ja summaamalla johdetut yhtälöt saadaan

Lause

Analyyttisen funktion $f = u + iv$ reaali- ja imaginaariosat ovat harmonisia funktioita eli ne toteuttavat Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön:

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ja} \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 .$$

Esimerkki: $z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$ on kokonainen ja selvästi

$$\Delta(x^2 - y^2) = 2 + (-2) = 0 \quad \text{ja} \quad \Delta(2xy) = 0 + 0 = 0 .$$

Tarkastellaan seuraavassa keskeisimpiä kompleksitason kuvauksia yksinkertaisemmista mutkikkaampiin geometriselta kannalta.

Esimerkkejä: 1. Kuvaus $z \mapsto z + a$ on **siirros** kompleksitasossa vektorin a verran. On selvää, että se kuvaa esim. suorat ja ympyrät samoiksi käyriksi.

Kuvaus $z \mapsto az$, $a \in \mathbf{C}$ koostuu kahdesta operaatiosta. Jos $a = |a|(\cos \theta + i \sin \theta)$ ja $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, nähdään helposti trigonometrisillä identiteeteillä, että

$$az = |a|r[\cos(\phi + \theta) + i \sin(\phi + \theta)].$$

Kuvaus on siis **kierto** kulman θ verran (vastapäivään jos positiivinen, myötäpäivään jos negatiivinen) yhdistettynä joko **venytykseen** ($|a| > 1$) tai **supistukseen** ($|a| < 1$).

Molemmat operaatiot säilyttävät suorat suorina ja ympyrät ympyröinä. Formaalisti: suoran yhtälö $\mathbf{C}$:ssä on $|z - a_1| = |z - a_2|$, $a_1 \neq a_2$. Jos siis $w = az$, saadaan $|w - aa_1| = |w - aa_2|$, suoran yhtälö. Samoin ympyrä $|z - a_1| = r$ kuvautuu käyräksi $|w - aa_1| = |a|r$ eli ympyräksi.

Inversio on kuvaus $z \mapsto z^{-1}$. Ensimmäiset havainnot siitä Esimerkissä 2: yksikköympyrä kuvautuu itselleen. Tarkastellaan yleisesti ympyrän $|z - z_0| = r$ kuvautumista. Jos $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ ja $w = u + iv$, saadaan kuvalla

$$\left(\frac{u}{u^2 + v^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{v}{u^2 + v^2} + y_0\right)^2 = r^2$$

josta edelleen

$$(u^2 + v^2) (r^2 - x_0^2 - y_0^2) + 2ux_0 - 2vy_0 = 1 .$$

Tämä on ympyrä, paitsi jos $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ jolloin jäljellä olevat osat antavat suoran yhtälön. Siis ympyrät kuvautuvat ympyröille paitsi jos ympyrä kulkee origon kautta, jolloin se kuvautuu suoraksi.

Suora $|z - a_1| = |z - a_2|$, $a_1 \neq a_2$ kuvautuu käyrälle $|\frac{1}{w} - a_1| = |\frac{1}{w} - a_2|$. Jos $a_1 = p + iq$ ja $a_2 = r + is$, saadaan samanlaisen manipulaation kautta muoto

$$(u^2 + v^2) (p^2 + q^2 - r^2 - s^2) + 2u(r - p) + 2v(q - s) = 0.$$

Tämä on origon kautta kulkeva ympyrä, paitsi jos $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$, jolloin kuva on origon kautta kulkeva suora.

2. Möbius-kuvaukset ovat tärkeitä kompleksitason funktioita. Ne ovat bilineaarisia rationaalifunktioita, täsmällisemmin:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \frac{ad - bc}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{C} .$$

Oikeanpuolisessa esityksessä lauseke on hajoitettu osiin: siirtoihin, kiertoihin ja inversioon. Koska suoran voidaan ajatella olevan äärettömän kautta kulkeva ympyrä,

voidaan edellä olevan perusteella summata, että Möbius-kuvauksilla on kiintoisa ominaisuus: ne **kuvaavat kompleksitason yleistetyt ympyrät itselleen**.

Lauseke $ad - bc$ on kuvauksen determinantti: jos se häviää, on kuvaus triviaali, vakio. Helposti myös nähdään, että

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

eli kuvaus on analyttinen paitsi jos $z = -d/c$. Derivaatta häviää jos ja vain jos determinantti häviää.

Möbius-kuvaukset, joiden determinantti ei häviää, muodostavat suljetun joukon: niiden käänteiskuvaus on myös Möbius, kuten on myös kompositio. Kertoimet lasketaan kätevästi vastaavuuden

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \longleftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avulla: kompositiolle saadaan

$$(m_1 \circ m_2)(z) = \frac{a_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + d_1} = \dots = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(a_2 c_1 + c_2 d_1)z + (b_2 c_1 + d_1 d_2)}$$

ja koska

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + c_2 d_1 & b_2 c_1 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

nähdään, että kertoimet täsmäävät. Edelleen $\det(M_1 M_2) = \det(M_1) \det(M_2) \neq 0$, koska M_1 ja M_2 ovat ei-singulaareja.

Kun $m(z) = w$, niin

$$z = m^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a} \quad \text{ja} \quad M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Jos kuvauksen determinantti on arvoltaan 1, on vastaavuus identtinen, muuten mukana on skaalaustekijä $\frac{1}{\det(M)}$. Koska kuitenkin matriisin kertominen skalaarilla tarkoittaa jokaisen alkion kertomista, voidaan Möbius-kuvausten yhteydessä rajoittua vaatimalla yksinkertaisesti $\det(M) = 1$.

Valinnoilla $a = d = 1$, $b = c = 0$ saadaan identiteettikuvaus eli yksikköelementti $m_0(z) = z$, joka vastaa yksikkömatriisia, $M_0 = I$. Möbius-kuvaukset muodostavat siis ryhmän, joka on isomorfinen (rakenneyhtäläinen) 2×2 -matriisien ryhmän kanssa.

Lause

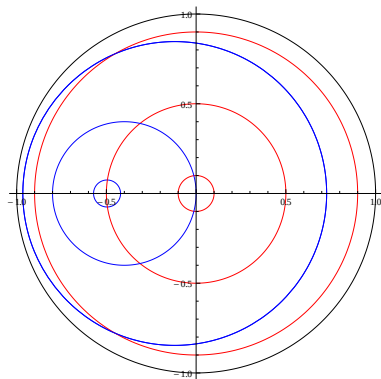
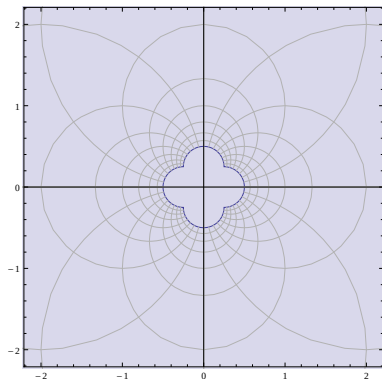
Möbius-kuvaukset $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, $ad - bc \neq 0$ ovat analyyttisiä funktioita kun $z \neq -d/c$, ne kuvaavat kompleksitason itselleen ja erityisesti (yleistettyjen) ympyröiden joukon itselleen.

Möbius-kuvaukset muodostavat ei-vaihdannaisen **ryhmän** joka on yhtenevä matriisiryhmän $GL(2, \mathbf{C})/((\mathbf{C} \setminus \{0\})I)$ kanssa, jossa

$$GL(2, \mathbf{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Yhtäpitävästi, jos halutaan olla tekemisissä vain matriisien, joiden determinantti on 1, kanssa, voidaan valita ryhmä $SL(2, \mathbf{C})/\{\pm I\}$, jossa

$$SL(2, \mathbf{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$



Vasemmalla: $1/z$, koordinaattiakselien suuntaisten janojen kuvia.

Oikealla: $\frac{z-1/2}{1-z/2}$, yksikkökiekon itsekuvaus. Punaiset ympyrät kuvautuu siniselle.

Tämä on elementti perheessä, jonka kuvaukset ovat muotoa $\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}$, $|z_0| < 1$; ne kaikki kuvaavat yksikkökiekon itselleen.

Lisää: www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY

Eksponenttifunktion yleistys kompleksiluvuille tehdään kaavalla ($z = x + iy$):

$$(*) \quad e^z = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

Reaalisella argumentilla (siis $y = 0$) tämä on reaalinen eksponenttifunktio. Heti nähdään, että $|e^z| = e^x$ ja $\arg(e^z) = y$. Samoin voidaan tarkistaa, että Cauchy-Riemannin yhtälöt pätevät kaikkialla $\mathbf{C}$:ssa ja saadaan

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{\partial}{\partial x} [e^x (\cos y + i \sin y)] = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z ,$$

joten e^z on äärettömän monta kertaa derivoituva ja kaikki derivaatat ovat samat. Trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavoista seuraa välittömästi, että

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} .$$

Kun muuttuja z on puhtaasti imaginaarinen, erikoistuu (*) Eulerin kaavaksi $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, jolloin myös kompleksiluvun eksponenttiesitys tulee ymmärrettäväksi:

$$w = |w| [\cos(\text{Arg}(w)) + i \sin(\text{Arg}(w))] = |w| e^{i \text{Arg}(w)} .$$

Kun y on reaalinen, on e^{iy} yksikkövektori ja koska reaalinen eksponenttifunktio e^x ei koskaan häviä, ei häviä myöskään kompleksinen: $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbf{C}$.

Ehkä yllättävin seuraus määritelmästä (*) on se, että kompleksinen eksponenttifunktio on jaksollinen. Imaginaariakselin suuntaan pätee

$$e^{z+i2n\pi} = e^z e^{i2n\pi} = e^z, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

Eksponenttifunktion **jaksovyö** on alue $\{z \mid -\pi < \Im(z) \leq \pi\}$. Kun funktion arvot tunnetaan sen pisteissä, tunnetaan ne jaksollisuuden nojalla koko kompleksitasossa. Jaksovyön vaakasuorat kuvautuvat origosta lähteviksi puoliäärettömiksi säteiksi ja pystyjanat origokeskiksi ympyröiksi.

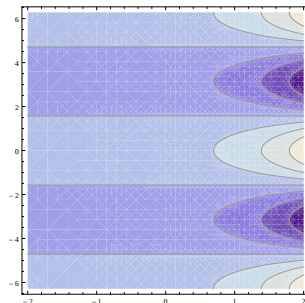
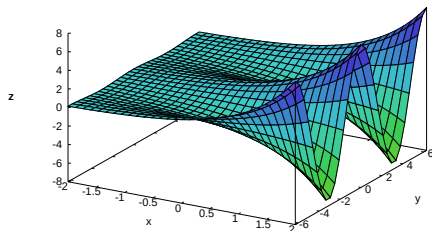
Lause

Kompleksinen eksponenttifunktio

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

on kokonainen funktio, $(e^z)' = e^z$, sillä ei ole nollakohtia ja se on jaksollinen toteuttaen kaavan $e^{z+i2\pi} = e^z$, $\forall z \in \mathbf{C}$.

Esimerkki: Jos valittaisiin $e^y(\cos x + i \sin x)$, saataisiin jatkuva ja jaksollinen, mutta ei-analyttinen funktio. Cauchy-Riemann ei päde: $\frac{\partial u}{\partial x} = -e^y \sin x \neq e^y \sin x = \frac{\partial v}{\partial y}$. Funktio ei myöskään palautuisi reaaliargumentilla tuttuun reaaliseen tapaukseen.



$\text{Re}(e^z)$: 3d- ja korkeuskäyräesitykset.

Jälkimmäinen (x, iy) -tasossa, isompi arvo on vaaleampi.

Eulerin kaavasta $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ja sen konjugaatista voidaan välittömästi ratkaista

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{ja} \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \quad , \quad x \in \mathbf{R}.$$

Jos nyt määritellään kompleksiarargumentille $z = x + iy$

$$(1) \quad \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{ja} \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \quad ,$$

niin tiedetään, että yleistys antaa reaalisena tapauksena tutut trigonometriset funktiot. Samoin eksponenttifunktion analytytisyys periytyy sinille ja kosinille. Koska edelleen

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{-y+ix} + e^{y-ix}) \quad \text{ja} \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{-y+ix} - e^{y-ix})$$

saadaan Eulerilla

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2} (e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)) \\ (2) \quad &= \cos x \frac{1}{2}(e + e^{-y}) - i \sin x \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \sin z &= \dots = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y . \end{aligned}$$

Edellä hyperboliset funktiot olivat tuttuja reaalisia, mutta nekin yleistyvät luontevasti kompleksiarvotille:

$$(3) \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \text{ja} \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Loput määritellään tutuilla kaavoilla

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \dots \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \dots$$

Edelläolevien määritelmien luonnollisuus ilmenee myös siinä, että funktioiden "alkuperäiset" jaksot, parillisuus/parittomuus, yhteenlaskukaavat, derivaatat jne. säilyvät. $\sin$ ja $\cos$ ovat 2π -jaksollisia, edellinen pariton, jälkimmäinen parillinen, $\tan$ pariton, π -jaksollinen. Edelleen

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz} \tan z = \frac{1}{\cos^2 z} \dots$$

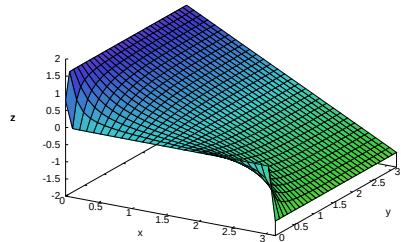
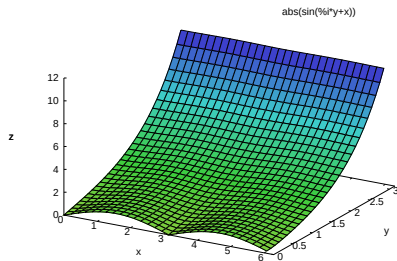
Huomaa, että $\sinh$ ja $\cosh$, jotka eivät ole reaalina jaksollisia, perivät $\mathbf{C}$:ssä uuden akselin suuntaan jakson $i2\pi$ eksponenttifunktiolta.

Lause

Kompleksitason trigonometriset funktiot $\sin$ ja $\cos$ määritellään eksponenttifunktion avulla käyttäen kaavoja (1) tai ekvivalentisti kaavoilla (2). Ne ovat 2π -jaksollisia kokonaisia funktioita. Muut trigonometriset funktiot määritellään osamäärinä ja ne ovat analyyttisiä muualla paitsi nimittäjän nollakohdissa.

Hyperboliset funktiot $\sinh$ ja $\cosh$ laajennetaan kompleksitasoon palauttamalla ne eksponenttifunktioon kuten ennenkin (3). Ne ovat jaksollisia, kokonaisia funktioita.

Viimeistään tässä vaiheessa lienee selvää, että kompleksitaso on luonnollinen ympäristö funktioille: reaalisessa tapauksessa erillisinä määritellyt ja omine laskusääntöineen toimivat funktot $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$ jne. osoittautuvat kaikki olevan "samaa juurta", eksponenttifunktion jälkeläisiä!



sin z : itseisarvo ja argumentti.

Luonnollinen logaritmi on eksponenttifunktion käänteisfunktio eli ratkaisu $w(z)$ yhtälölle $e^w = z$. Olkoon $w = u + iv$ ja $z = |z|e^{i\arg(z)}$. Silloin

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = z = |z|e^{i\arg(z)},$$

josta identifioidaan $e^u = |z|$ ja $v = \text{Arg}(z) + n2\pi$. Siten on määriteltävä

$$(1) \quad \ln z = \ln |z| + i(\text{Arg}(z) + m2\pi), \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Logaritmi on siis äärettömän monikäsitteinen funktio. Tämä on väistämätön seuraus siitä, että kompleksinen eksponenttifunktio on jaksollinen imaginaariakselin suuntaan. Yllä olevassa esityksessä (1) käytetään siis argumentin pääarvoa, $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$. Jos logaritmilille käytetään vain päähaaraa, on silloin tehty ns. haaraleikkaus pitkin negatiivista reaaliakselia, jonka yli argumentilla on $i2\pi$ suuruinen hyppäys (ja toisinaan käytetään poikkeavaa merkintää, esim. $\text{Ln}(z) = \ln |z| + i\text{Arg}(z)$).

Koska $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, saadaan reaalisen logarimin hyödyllinen laskusääntö myös kompleksitasoon:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2.$$

ja analoginen tulos osamäärälle. Edelleen

$$\begin{aligned} \frac{d \ln z}{dz} &= \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \frac{\partial}{\partial x} \text{Arg}(z) \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + y^2/x^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Siten päähaarallaan (argumentti pääarvossa) logaritmi on analyyttinen, paitsi tietenkin origossa, jossa se ei ole edes jatkuva.

Siten päähaarallaan (argumentti pääarvossa) logaritmi on analyyttinen, paitsi tietenkin origossa, jossa se ei ole edes jatkuva.

Potenssifunktio voidaan palauttaa eksponenttifunktioon ja logaritmiin ($z \neq 0$):

$$(2) \quad z^c = (e^{\ln z})^c = e^{c \ln z}, \quad c \in \mathbf{C},$$

joka on yleisesti monikäsitteinen. Jos kuitenkin rajoitutaan logaritmin pääarvoon, on se yksikäsitteinen. Erityisesti huomataan, että jos $c = n$, nollasta eroava kokonaisluku, pätee

$$e^{n \ln z} = e^{n \ln |z| + i n \operatorname{Arg}(z) + i n m 2\pi} = e^{n \ln |z| + i n \operatorname{Arg}(z)},$$

joka on yksikäsitteinen, kuten jo aiemmasta tiedetään.

Jos kyseessä on n 's juuri, $c = 1/n$, $n = 2, 3, \dots$ saadaan

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln |z| + i \left(\frac{1}{n} \operatorname{Arg}(z) + \frac{m}{n} 2\pi \right)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

eli n erillistä juurta, sama argumentti ja tasaväliset vaihekulmat, kuten pitääkin. Myös yleiselle rationaaliselle potenssille $c = n_1/n_2$, n_1 ja n_2 kokonaislukuja, joilla ei ole yhteistä tekijää, saadaan samalla argumentilla äärellinen määrä juuria. Jos c on irrationaalinen, juuria on ääretön määrä.

Palautuskaavalla voidaan tietenkin laskea myös kompleksisia potensseja. Vaikkapa

$$i^i = e^{i \ln(i)} = e^{i(\ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + n2\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - n2\pi}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

kaikki reaalityyppiset luvut

Logaritmi mielivaltaiseen positiiviseen kantalukuun palautetaan luonnolliseen logaritmiin tutulla kaavalla $\log_k z = \ln z / \ln k$ ja yleinen eksponenttifunktio e -kantaiseen kaavalla $a^z = e^{z \ln a}$.

Summataan:

Lause

Kompleksinen logaritmi, $\ln z$, *eksponenttifunktion käänteisfunktio, joka määritellään kaavalla (1), on äärettömän monikäsitteinen funktio. Päähaarallaan se on yksikäsitteinen ja analyyttinen origon komplementissa.*

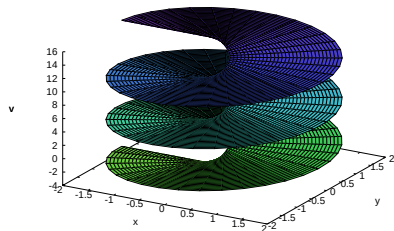
Yleinen potenssi, z^c *palautetaan eksponentti- ja logaritmifunktioihin kaavalla (2). Se on yleisesti äärettömän monikäsitteinen funktio, paitsi rationaaliselle eksponentille. Jälkimmäisessä tapauksessa funktio on päähaarassaan analyyttinen paitsi mahdollisesti origossa.*

Ohessa hahmotus logaritmin

$$\begin{aligned} w = \ln z &= u + iv \\ &= \ln |z| + i(\operatorname{Arg}(z) + n2\pi), \quad z \neq 0 \end{aligned}$$

monikäsitteisyydestä. Korkkiruuvi on ääretön, ohessa esitetty vain kolmea jaksoa siitä, $n = 0, 1$ ja 2 (ja kuvassa on sylinterirajaus, pinta jatkuu yli koko $\mathbb{C}$ -tason). Jokaisen kompleksitasen pisteen (x, iy) ylä- ja alapuolella on ääretön määrä mahdollisia v :n arvoja.

Funktio z^3 lähettää kolme pistettä ($z \neq 0$) jokaiseen kuvapisteeseen. Jos piirretyn pinnan ylin ja alin leikkaus ajatellaan olevan samat (siis yhteenliimatut ja pinta on vain kolmikerroksinen), voidaan ajatella näiden kolmen pisteen olevan erotellut eri lehdillä ja kuvaus ei ole enää 3-1, vaan 1-1 (injektio).



Oleellisinta tällöin on kuitenkin se, että kuutiojuuren käyttäytyminen selkeytyy: se ei enää ole monikäsitteinen, vaan siitä tulee "oikea funktio", yksikäsitteinen kuvaus. Konstruktio on perustava **Riemannin pintojen** rakentelussa.

Määritelmä

*Kompleksitason kuvaus on **konforminen**, jos sen alaisuudessa säilyvät sekä kulmat, että niiden orientaatio (kulman oikea reuna on kuvassakin oikealla).*

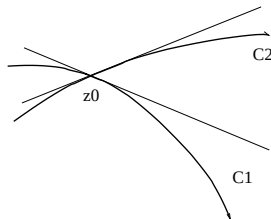
Konfomikuvaukset ovat siis tason ortogonaalisia kuvauksia ja lisäksi niiden determinantti on 1 (orientaationsäilyttävyys). Etsitään nyt kriteeri tälle ominaisuudelle kompleksitason funktioille.

Olkoon $z(t) = x(t) + iy(t)$ parametrisoitu, sileä tasokäyrä analyyttisen funktion $w = f(z)$ määrittelyalueessa. Silloin $\dot{z}(t_0)$ on käyrän kulmakerroin pisteessä $z_0 = z(t_0)$. Edelleen ketjusäännöllä $\frac{dw}{dt} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dt}$, joten

$$\arg(\dot{w}(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{z}(t_0)) ,$$

jos argumentti on hyvin määritelty eli $f'(z_0) \neq 0$.

Olkoot C_1 ja C_2 sileitä käyriä ja z_0 niiden



leikkauspiste. Kun z_0 :n ympäristö kuvataan w -tasoon, kiertyvät käyrien tangentit saman kulman $f'(z_0)$ verran kuvapisteen $f(z_0)$ ympäristössä.

Lause

Analyttinen funktio on konforminen, jos sen derivaatta ei häviä.

Huomaan, että viivaelementit käyriä C_i pitkin z_0 :n ympäristössä skaalautuvat kuvassa saman tekijan, $|f'(z_0)|$:n, verran. Siten konformisen kuvauksen alaisuudessa myös muoto säilyy lokaalisti.

Seuraavassa konformisuuden kenties tärkein seuraus, arvokas ominaisuus esimerkiksi osittaisdifferentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa (todistus löytyy mm. Kreyszigista).

Seurauslause

Analyttinen, injektiivinen funktio säilyttää harmonisuuden.

Kalvolla 15 määriteltiin analyyttisen funktion linearisointi, Jacobin matriisi. Sille pätee

$$\begin{aligned} Df &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} K(\phi), \end{aligned}$$

jollekin $\phi \in (-\pi, \pi]$. Matriisi $K(\phi)$ on **kierto tasossa** kulman ϕ verran (vastapäivään jos $\phi > 0$, muuten myötäpäivään). Tekijä $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |f'| \geq 0$ skaalaa vektorin pituutta ja se häviää täsmälleen silloin, kun f ei ole konforminen. Kierto tietenkin säilyttää kahden sileän käyrän leikkauskulman, joka on konformisen kuvauksen avain. Myös orientaatio säilyy: $\det K(\phi) \equiv 1$. Analyyttiset funktiot ovat siis lokaalisti ortogonaalisia kuvauksia yhdistettynä yksinkertaiseen skaalaukseen.

(Vasta)esimerkki: Jos $g(z) = \bar{z} = x - iy$, niin

$$Dg = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

jolle $\det(Dg) = -1$. Tämä kertoo sen, että kuvauksessa g (joka on geometrisesti peilaus) kätisyys vaihtuu, eikä kyseessä siis voi olla analyyttinen kuvaus.

Esimerkkejä: Monomin z^n , $n = 2, 3, 4, \dots$ derivaatta nz^{n-1} häviää origossa. Jos sileän käyrän tangentin suuntakulma on origossa α on sen kuvan argumentti $n\alpha$, joten kuvaus ei ole konforminen origossa.

Möbius-kuvaukset $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ luonnollisella ei-triviaalisuusehdolla $ad - bc \neq 0$ ovat konformisia koko tasossa, koska $w'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$. Huomaa, että tämä selittää välittömästi sen, miksi vasemman kalvon 24 käyrät ovat kohtisuorassa: ne ovat kohtisuorien koordinaattiivojen kuvia funktion $w = 1/z$ alaisuudessa.

Eksponenttifunktiolla ei ole nollakohtia kompleksitasossa sillä $|e^z| = e^x$, eikä reaalinen eksponenttifunktio häviää. Koska lisäksi eksponenttifunktio on itsensä derivaatta, on se siten konformikuvaus koko tasossa.

Jaksovyön $-\pi < \Im(z) \leq \pi$ vaakaviivat kuvautuvat origosta lähteviksi säteiksi ja pystyviivat origokeskiseksi ympyröiksi. z -tason koordinaattikäyräparvet ovat ortogonaaliset, joten sitä ovat kuvaparvetkin.

Logaritmin konformisuusominaisuudet seuraavat edellisestä, kun pidetään mielessä singulariteetti origossa.

Sini ja kosini määriteltiin

$$\begin{cases} \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{cases}$$

ja ne ovat kokonaisfunktoita. Sinin derivaatan $\cos z$ nollakohtia ovat $z = \pm \frac{\pi}{2}$,

joissa sinifunktio ei siis ole konforminen. Helposti nähdään että väli $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ kuvautuu janalle $-1 \leq u \leq 1$. Edelleen, kun merkitään $u = \Re(\sin z) = \sin x \cosh y$ ja $v = \Im(\sin z) = \cos x \sinh y$, voidaan ratkaista

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1 .$$

Edellinen on ellipsiparvi, puoliakselit $\cosh y$ (pidempi) ja $\sinh y$ ja polttopisteet ± 1 . Jälkimmäinen on hyperbeliparvi, jonka haarat aukeavat vasemmalle ja oikealle. Koska edellisen käyräparven parametrisoivat z -tason pystysuorat ja jälkimmäisen vaakasuorat, pitää näiden ortogonaalisten käyräparvien kuvien olla konformisessa kuvauksessa ortogonaaliset. Siten ellipsi- ja hyperbeliparvet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Konformisuuden menetetyks pisteissä $\pm \frac{\pi}{2}$ johtaa siihen, että suorat $x = \pm \frac{\pi}{2}$ kuvautuvat puolisuorille $\{u \leq -1, v = 0\}$ ja $\{u \geq 1, v = 0\}$ (nämä saadaan hyperbeliparven rajana kun $x \downarrow -\frac{\pi}{2}$ ja $x \uparrow \frac{\pi}{2}$).

Kosinin kuvausominaisuudet palautuvat edelliseen, kun muistetaan, että pätee

$$\cos z = \sin \left(z + \frac{\pi}{2} \right) .$$