Tutkitaan kompleksitermisten jonojen ja sarjojen ominaisuuksia. Päätavoite on kompleksifunktioiden sarjakehitelmien ymmärrys.

Määritelmä

Kompleksilukujono $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ **suppenee (konvergoi)** *kohti rajaa* z^* *jos jokaiselle* $\epsilon > 0$ *on olemassa* k_0 *siten, että kaikille* $k \geq k_0$ *pätee* $|z_k - z^*| < \epsilon$. *Jono, joka ei suppene,* **hajaantuu (divergoi)**.
Sarja $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *suppenee/hajaantuu, jos osasummien* $S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ *jono suppenee/hajaantuu ylläolevassa mielessä. Jos sarja* $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ *suppenee, sanotaan, että alkuperäinen sarja* **suppenee itseisesti (absoluuttisesti)**.

Lause

Jono suppenee joss sen reaali- ja imaginaariosat suppenevat.

Määritelmä

Piste $z^\star$ *on* **jonon kasaantumispiste**, *jos jokaiselle* $\epsilon > 0$ *pätee* $|z_k - z^\star| < \epsilon$ *äärettömän monelle indeksin* k *arvolle.*

Lause (Bolzano-Weierstrass)

Rajoitetulla äärettömällä jonolla on ainakin yksi kasaantumispiste.

Lause (Cauchyn suppenemiskriteeri)

Jono $\{z_k\}$ *suppenee joss jokaiselle* $\epsilon > 0$ *on olemassa* $N(\epsilon)$ *siten, että* $|z_n - z_m| < \epsilon$ *kun* $\min\{n, m\} > N$.

Lause

Jos sarja $\sum_0^\infty z_k$ *suppenee, niin välttämättä* $z_k \to 0$. *Siten jos jono* $\{z_k\}$ *ei suppene nollaan, sarja väistamättä hajaantuu. Jos* $z_k \to 0$ *niin siitä ei välttämättä seuraa sarjan* $\sum_0^\infty z_k$ *suppeneminen.*

Todistukset esim. Kreyszigissa.

Lause (Vertailutesti)

Jos kompleksitermiselle sarjalle $\sum_0^\infty z_k$ löytyy reaaliterminen suppeneva sarja $\sum_0^\infty r_k$ ja pätee $|z_k| \leq r_k,\ \forall k$ suppenee kompleksiterminen sarja absoluuttisesti.

Esimerkki: Tarkastellaan kompleksista geometrista sarjaa $\sum_{k=0}^\infty z^k$. Jos $q = |z| \geq 1$, eivät termit lähesty nollaa, joten sarja hajaantuu.
Jos $q < 1$, niin kompleksisen sarjan suppenevuus palautuu reaalisen sarjan $\sum_{k=0}^\infty q^k$ suppenevuuteen, joka on tunnettu. Jos määritellään $S_n = \sum_{k=0}^n z^k$, pätee $S_{n+1} = 1 + zS_n$, joten summan raja-arvon S^* on toteutettava yhtälö $S^* = 1 + zS^*$, josta edelleen $S^* = \frac{1}{1-z}$. Siten ainakin avoimessa yksikköympyrässä pätee sarjakehitelmä

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^\infty z^k \ .$$

Mieti, mitä summalle tapahtuu yksikköympyrällä, kun z on riittävän yksinkertainen, esimerkiksi yksikköjuuri.

Lause (Suhdetesti)

Jos jonon $\{z_k\}$ termit ovat nollasta eroavia ja pätee

$$\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \to L \ ,$$

niin sarja $\sum_0^\infty z_k$ suppenee itseisesti, jos $L < 1$ ja hajaantuu, jos $L > 1$. Jos $L = 1$, ei testi anna tulosta.
Hieman yleisemmin, jos on olemassa $q < 1$, k_0 ja jokaiselle $k \geq k_0$ pätee $\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \leq q$, niin sarja suppenee itseisesti. Samoin jos asymptoottisesti pätee $\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Esimerkkejä: 1. Sarja $\sum_{k=0}^\infty \frac{(1+i)^k}{k!}$ suppenee, sillä

$$\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| = \frac{\sqrt{2}}{k+1} \to 0$$

eli $L = 0$ toimii suhdetestissa (tai mielivaltainen $0 < q < 1$).

Jos yllä olevassa testissä $L = 1$, voi sarja olla joko suppeneva tai hajaantuva - asia on tutkittava muilla keinoin. Esimerkiksi **harmoniselle sarjalle**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

pätee $S_n \approx \ln(n+1) \to \infty$ eli sarja hajaantuu (reaalisella) integraalitestillä.

2. Samalla testilla muutkin reaaliset ***p*-sarjat** $\sum_1^\infty \frac{1}{k^p},\ p > 1$ (joille kaikille $L = 1$) voidaan osoittaa suppeneviksi. Tästä seuraa välittömästi se hyödyllinen toisiasia, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^p}$$

on suppeneva yksikköympyrässä (edellinen testi).

Jos yllä olevassa testissä $L = 1$, voi sarja olla joko suppeneva tai hajaantuva - asia on tutkittava muilla keinoin. Esimerkiksi **harmoniselle sarjalle**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

pätee $S_n \approx \ln(n+1) \to \infty$ eli sarja hajaantuu (reaalisella) integraalitestillä.

2. Samalla testilla muutkin reaaliset ***p*-sarjat** $\sum_1^\infty \frac{1}{k^p},\ p > 1$ (joille kaikille $L = 1$) voidaan osoittaa suppeneviksi. Tästä seuraa välittömästi se hyödyllinen toisiasia, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^p}$$

on suppeneva yksikköympyrässä (edellinen testi).

Lause (Juuritesti)

Jos $\sqrt[k]{|z_k|} \to L$, niin sarja $\sum z_k$ suppenee itseisesti, jos $L < 1$ ja hajaantuu, jos $L > 1$.

Lause (Abel)

Jos **potenssisarja** $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k,\ z, a, c_k \in \mathbf{C}, \forall k$ *suppenee kun* $z = z_0$, *suppenee se itseisesti joukossa* $\{z|\ |z-a| < |z_0 - a|\}$. *Jos sarja hajaantuu* z_0*:ssa hajaantuu se kaikilla* $|z-a| > |z_0 - a|$.

Tod.: Koska sarja suppenee z_0:ssä, pätee $c_k(z_0 - a)^k \to 0$. Siten on olemassa $M < \infty$ siten että $|c_k(z_0-a)^k| \leq M,\ \forall k$. Niinpä

$$|c_k(z-a)^k| = \left| c_k(z_0-a)^k \left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^k \right| \leq M \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k$$

joten $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(z-a)^k| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k$. Koska $\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| < 1$, suppenee sarja vertailutestin nojalla (geometriseen sarjaan).
Jos sarja suppenisi jollain z_1 siten, että $|z_1 - a| > |z_0 - a|$, niin edellisen nojalla sarja suppenisi kaikilla $|z-a| < |z_1 - a|$ eli erityisesti z_0:ssä, ristiriita. QED

Määritelmä

Jos potenssisarja $\sum_0^\infty c_k(z-a)^k$ suppenee, kun $|z-a| < R$, mutta hajaantuu, kun $|z-a| > R$, on R sarjan **suppenevuussäde**.

Selvästi $R \geq 0$. Jos $R = 0$, suppenee sarja vain pisteessä a, sarjan **kehityskeskipisteessä**.

Lause (Cauchy-Hadamardin kaava)

Jos $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}_0^\infty$ suppenee rajaan L, pätee $R = 1/L$. Jos $L = \infty$, suppenee sarja vain sarjan kehityskeskipisteessä.

Tod., idea: Jos $\sqrt[n]{|c_n|} \to L \neq 0$, pätee

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} = |z-a| \sqrt[n]{|c_n|} \to |z-a|L \ .$$

Siten juuritestin nojalla sarja suppenee kun $|z-a|L < 1$ ja hajaantuu kun $|z-a|L > 1$, joista väite seuraa.
(Kriteeria voidaan hieman terävöittää, katso esim. Kreyszig.)

Toisaalta voidaan huomata, että Suhdetestissä

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |z-a| \to L^*|z-a|.$$

Siten $L^{(s)} = L^*|z-a|$, josta voidaan päätellä toinen tapa laskea suppenemisympyrän säde:

$$R = \frac{1}{L^*} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| .$$

Summa summarum, potenssisarjalle $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ pätee:

- Jos $0 < R < \infty$, niin sarja suppenee itseisesti, kun $|z-a| < R$ ja hajaantuu, kun $|z-a| > R$.
- Jos $R = \infty$, niin sarja suppenee itseisesti koko $\mathbf{C}$:ssä ja
- jos $R = 0$, niin sarja suppenee vain kehityskeskipisteessä a.

Uusien potenssisarjojen muodostamiseksi jo tunnetuista, on hyödyllistä tietää, että konvergoivat potenssisarjat voidaan summata termeittäin yhteen (helppo todistus osasummia tarkastelemalla).

Jos määritellään sarjojen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ja $\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ **Cauchy-tulo**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$$

voidaan todistaa

Lause

Kahden potenssisarjan Cauchy-tulo suppenee itseisesti molempien sarjojen suppenevuusympyröiden leikkauksessa. Jos sarjojen summia merkitään $g(z)$ ja $h(z)$, on Cauchy-tulo funktio $g(z)h(z)$.

Esimerkki: Tiedetään, että yksikköympyrässä pätee $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$. Jos sarja kerrotaan itsellään, on Cauchy-tulon konvoluutiokertoimet helppo laskea: $\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = n+1$, joten

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots$$

joka siis suppenee niinikään yksikköympyrässä.

Huomaa, että yllä vasen puoli on $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)$ ja toisaalta oikea puoli on alkuperäinen sarja termeittäin derivoituna. Yleisemmin, jos tarkastellaan sarjoja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n z^n$, Juuritesti sovellettuna jälkimmäiseen antaa $\sqrt[n]{|(n+1)c_n|} = \sqrt[n]{n+1}\sqrt[n]{|c_n|}$. Koska $\sqrt[n]{(n+1)} \to 1$, nähdään, että molemmille sarjoille kriteeri antaa saman rajan L, ergo saman suppenemissäteen $R = \frac{1}{L}$. Integroidun sarjan kertoimet ovat muotoa $\frac{c_n}{n-1}$ ja sama argumentti toimii. Siten on osoitettu ensimmäinen puolisko seuraavasta

Lause

Termeittäin derivoidun tai integroidun sarjan suppenemissäde on sama kuin alkuperäisen. Potenssisarja, jolla on positiivinen suppenemissäde, on analyyttinen funktio suppenemisympyrässä.

Edellisen lauseen todistus ei ole kovinkaan vaikea (esim. Kr.). Kiinnostavampaa on se, että se itse asiassa täydentyy: jokaisella analyyttisella funktiolla on suppeneva potenssisarja. Osoittautuu, että reaalinen teoria yleistyy ja saadaan

Lause (Taylorin lause)

Olkoon f analyyttinen alueessa D. Jos $a \in D$, on olemassa yksikäsitteinen potenssisarja kehityskeskuksena a:

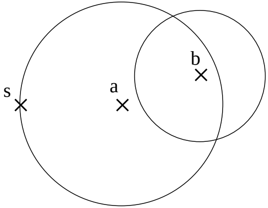
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n, \quad \textit{jossa} \quad b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \dots$$

Sarja suppenee D:n suurimmassa a-keskisessä ympyrässä. Edelleen pätee $|b_n| \le \frac{M}{r^n}$, jossa $M = \max_{\{z| \; |z-a|=r\}} |f(z)|$.

Todistus edellyttää kompleksi-integrointia ja siihen palataan. Jos $a = 0$, on kyseessä f:n Maclaurinin sarja.

Analyyttiselle funktiolle on siis aina olemassa suppeneva potenssisarja. Reaalifunktiolla, vaikka se olisi äärettömän monta kertaa derivoituva, ei välttämättä ole ole olemassa suppenevaa sarjakehitelmää.

Piste, jossa analyyttinen funktio lakkaa olemasta analyyttinen on **erikois- eli singulaaripiste**. Yleinen periaate on, että suppenemisympyrä ulottuu kehityskeskipisteestä a lähimpään erikoispisteeseen s saakka. Kuitenkin jos kehityskeskipistettä muutetaan (kuvassa $a \to b$), voidaan funktion uusi kehitelmä usein saada suppenemaan alkuperäisen ympyrän ulkopuolella. Tätä menettelyä kutsutaan **analyyttiseksi jatkamiseksi**.



Esimerkkejä: 1. Geometrinen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$ suppenee funktioon $\frac{1}{1-z}$, jonka Maclaurinin sarja se siis yksikäsitteisyyden nojalla on. Funktiolla on singulariteetti arvolla $z = 1$, joten suppenemisympyrän on rajoituttava siihen.

2. Eksponenttifunktio on itsensä derivaatta, joten $\left(\frac{d^n}{dz^n} e^z\right)(0) = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ja koko kompleksitasossa suppeneneva Maclaurinin sarja saadaan helposti:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ .$$

Huomataan erityisesti, että puhtaasti imaginaariselle argumentille saadaan summan reaali- ja imaginaariosat erotellen

$$(*) \qquad e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \ .$$

Toisaalta

$$\left(\frac{d^{2k+1}}{dz^{2k+1}} \sin z\right)(0) = (-1)^k, \quad ja \quad \left(\frac{d^{2k}}{dz^{2k}} \cos z\right)(0) = (-1)^k, k = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$

muuten evaluaatiot nollia, joten nähdään, että $(*)$ on Eulerin kaava:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \ .$$

3. Koska $\frac{d}{dz}\ln(1-z) = -\frac{1}{1-z}$ ja koska geometrinen sarja voidaan integroida, saadaan

$$\ln(1-z) = -\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\right), \; |z| < 1 \; .$$

Jos sijoitetaan $z \to -z$, saadaan tästä $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$, funktion $\ln(1+z)$ Maclaurinin sarja. Edelleen, sijoittamalla $z+1 \to z$ päädytään esitykseen

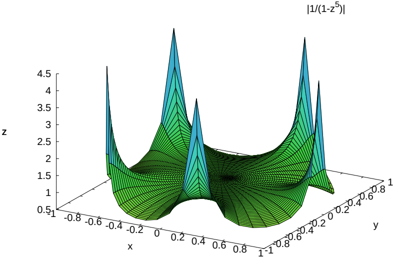
$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n} \; ,$$

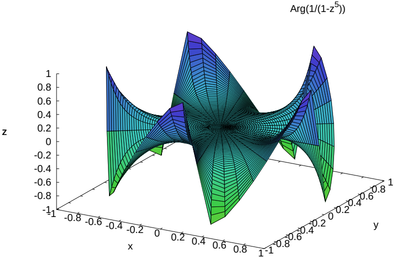
joka on logaritmin Taylorin sarja kehityskeskipisteenä $a = 1$ ja suppenemissäteenä 1.

4. Tunnettua sarjakehitelmää voidaan hyödyntää monin tavoin. Jos tiedetään, että $\frac{d}{dz}\arctan z = \frac{1}{1+z^2}$ (funktion ja käänteisfunktion derivaattojen esitykset ovat reaalitapauksesta tutussa suhteessa: $\frac{d}{dz}(f^{-1})(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$), saadaan sijoittamalla geometriseen sarjaan $z \to -z^2$ ja integroimalla:

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \; |z| < 1.$$

Arctan on moniarvoinen funktio, tässä sen päähaaran esitys.





$\left|\frac{1}{1-z^5}\right|$ ja $Arg\left(\frac{1}{1-z^5}\right)$ kiekossa $|z| \leq 0.95$.
Yksinkertaiset navat viidensissä yksikköjuurissa.

Funktio voidaan kehittää sarjaksi useilla eri tavoin. Esimerkiksi

$$\frac{1}{z-3} = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\cdots\right) = \frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z^3}+\cdots,$$

joka suppenee kun $|\frac{3}{z}| < 1$ eli $|z| > 3$.

Jotta voidaan käsitellä funktioita, joilla on erilaisia singulariteettejä kompleksitasossa, yleistetään sarjakehitelmät seuraavasti

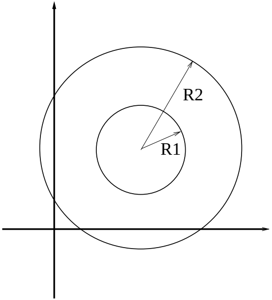
Määritelmä (Laurent-sarja)

Jos funktiolle on olemassa jossain alueessa suppeneva sarja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \; c_n \in \mathbf{C},$$

sanotaan sen olevan f:n **Laurent-sarja** *kehityskeskipisteenä a.*

Sarjan suppenemiseen vaikuttaa kaksi tekijää: (i) ei-negatiivisten potenssien summautuminen jossain kiekossa $|z-a| < R_2$ ja toisaalta (ii) $\frac{1}{z-a}$:n potenssien muodostaman "vasemman hännän" suppeneminen, kun $\frac{1}{|z-a|} < \frac{1}{R_1}$. Jos $R_1 < R_2$, saadaan Laurent-sarjan suppenemisalueeksi **rengas** (**annulus**).



Esimerkkejä: 1. Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$ Laurent-kehitelmä origossa löytyy geometrisen sarjan avulla:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{[1-(-z)]} = \frac{1}{z^2}\left(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - \cdots$$

joka suppenee **punkteeratussa kiekossa** $\{z \mid 0 < |z| < 1\}$. Jos valitaan $a = -1$, voidaan kehittää seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
f(z) = &\frac{1}{z+1}\frac{1}{[1-(z+1)]^2} = \frac{1}{z+1}\left(1+2(z+1)+3(z+1)^2+\cdots\right) \\
= &\frac{1}{z+1}+2+3(z+1)+4(z+1)^2+\cdots
\end{aligned}
$$

Tämä suppenee punkteeratussa kiekossa $\{z \mid 0 < |z+1| < 1\}$.

2. Tarkastellaan funktiota $g(z) = e^{1/z}$. Kaikkialla tasossa suppenevasta e^z:n Maclaurinin kehitelmästä saadaan esitys

$$
g(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots ,
$$

joka on siis g:n punkteeratussa tasossa $\{z \mid z \neq 0\}$ suppeneva Laurent-sarja.

3. Jos on annettuna esimerkiksi $h(z) = z^3 e^{1/z}$, saattaa olla mielenkiintoa kehittää myös pisteen $z = \infty$ suhteen. Asetetaan $w = \frac{1}{z}$, silloin kehityskeskuksena $w_0 = 0$:

$$
h(z) = h(\frac{1}{w}) = \left(\frac{1}{w^3}\right)\left(1+w+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\cdots\right) = \frac{1}{w^3}+\frac{1}{w^2}+\frac{1}{2!w}+\frac{1}{3!}+\frac{w}{4!}+\cdots ,
$$

joka suppenee punkteeratussa tasossa $\{w \mid w \neq 0\}$.

Määritelmä

Olkoon funktiolle f:lla suppeneva Laurent-kehitelmä

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad c_{-n} \neq 0 \ .$$

*Jos $n = 0$, on f analyyttinen suppenemisalueessa. Jos $n > 0$, on sillä n:**nen asteen napa** a:**ssa**. Jos $n = 1$, on kyseessä* **yksinkertainen napa**. *Jos $n = \infty$ on kyseessä* **oleellinen singulariteetti**.

Esimerkkeja: 1. Polynomeilla, kuten ei millään muullakaan kokonaisella funktiolla ole erikoispisteitä. Polynomien osamäärät eli rationaalifunktiot, ovat analyyttisia muualla, paitsi nimittäjän nollakohdissa. Jos

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = d\,\frac{(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_k)}{(z-\tilde{z}_1)(z-\tilde{z}_2)\cdots(z-\tilde{z}_m)} \ ,$$

on funktiolla navat pisteissä $\{\tilde{z}_i\}_1^m$ ja näiden kertaluvut määräävät navan asteen.

Rationaalifunktiot ovat esimerkkeja **meromorfisista funktioista**. Muita sellaisia ovat esimerkiksi ei-kokonaiset trigonometriset funktiot kuten $\tan z$, joilla on yksinkertainen napa jokaisessa pisteessä $\frac{\pi}{2} + ik\pi$ eli $\cos z$ nollakohdissa.

2. Edellä olevan Esimerkin 2. jatkoa... funktion $g(z) = e^{1/z}$ Laurent-sarjaesityksen perusteella funktiolla $z^k e^{1/z}$ on origossa napa jokaisella $k = 1, 2, 3 \ldots$ Siten g:lla on "äärettömän kertaluvun napa" origossa eli oleellinen singulariteetti.

Funktio $e^{1/z}$ käyttäytyy origon läheisyydessa hyvin villisti. Yhtälön $e^{1/z} = a \neq 0$ ratkaisujoukko on

$$\left\{ z_k \middle| \ \frac{1}{z_k} = Ln(a) + i2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \right\}$$

Siten kun $|k| \to \infty$ nähdään, että $z_k \to 0$ eli origon jokaisessa ympäristössä on ääretön määrä yhtälön ratkaisuja. Tämä on itse asiassa tyypillinen tilanne:

Lause (Picard)

Oleellisen singulariteetin ympäristössä funktio saa kaikki kompleksilukuarvot mahdollisesti yhtä lukuunottamatta äärettömän monta kertaa.

Huomaa, että Esimerkin 2 kohdalla tiedämme myös poikkeusarvon: 0.

Jatkossa erityisen oleelliseksi osoittautuu Laurent-kehitelmän kerroin c_{-1}. Sitä kutsutaan kehitelmän **residyksi** pisteessä a. Jos funktiolla f on vain ensimmäisen kertaluvun (yksinkertainen) napa, pätee

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \ ,$$

joten residy voidaan laskea kaavalla

$$Res_{z=a} f(z) = c_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) \ .$$

Huomataan myös, että jos tunnetaan esitys $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, g ja h analyyttisia a:n ympäristössä, $g(a) \neq 0$, pätee Taylor-kehittämällä

$$h(z) = h'(a)(z-a) + \frac{h''(a)}{2}(z-a)^2 + \dots$$

Siten residylle yksinkertaisessa navassa pätee myös usein käyttökelpoinen esitys:

$$Res_{z=a}f(z) = \lim_{z\to a}\frac{g(z)}{h'(z)} \ ,$$

Yleinen laskukaava residylle korkeampiasteisessa navassa:

Lause

Jos funktiolla f on m:nnen asteen napa pisteessä a, ratkaistaan residy eli kerroin c_{-1} kaavasta

$$Res_{z=a}f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]\right\} \ .$$

Esimerkkejä: 1. Funktio $\frac{\sin z}{z}$ on origossa määrittelemätön $\frac{0}{0}$, mutta koska

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots ,$$

voidaan "erikoispisteessä" $z = 0$ määritellä funktion arvoksi 1 ja siitä tulee silloin analyyttinen myös origossa. Tällöin sanotaan, että origo on **poistuva erikoispiste**.

2. Rationaalifunktiolla $\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ on yksinkertaiset navat pisteissä $\pm 2i$ ja kaksinkertainen napa pisteessä -1. Edellisissä residyt ovat

$$\lim_{z\to\pm 2i}(z-(\pm 2i))\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} = \frac{-4-(\pm 4i)}{(\pm 2i+1)^2(\pm 4i)} = \frac{1}{25}(7+(\pm i))$$

ja kolmannessa

$$\frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left\{(z+1)^2\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\} = \lim_{z\to 1}\frac{(z^2+4)(2z-2)-(z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)}$$

$$= -\frac{14}{25} .$$

Koska usein on annetun funktion erikoispisteiden ymmärtämisen kannalta oleellista ymmärtää jonkun muun funktion nollakohdat, esitetään lopuksi eräänlainen summaus aiheesta. Olkoon

$$Z(f) = \{a \in \mathbf{C} \mid a \in D, f(a) = 0\}$$

alueessa D määritellyn kompleksifunktion f nollakohtien joukko.

Lause

Jos f on analyyttinen alueessa D, niin pätee sille täsmalleen yksi seuraavista:

1. $Z(f) = \emptyset$
2. $Z(f) = D$
3. $Z(f) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
4. $Z(f) = \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \Rightarrow a_j \to \partial D.$

(∂D siis tarkoittaa joukon D reunaa)