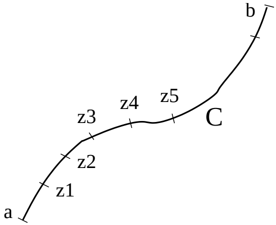
Integroinnin perustekniikka kompleksitasossa palautuu reaaliseen integrointiin, mutta analyyttisyyden kautta kompleksi-integraaleille saadaan syvällisiä, aivan uudenlaisia tuloksia, joiden avulla voidaan jopa ratkaista reaalisia (integrointi- ja muita) probleemeja, jotka muuten olisivat ylivoimaisia.

Olkoon $z(t) = x(t) + iy(t), \ t \in I$ sileä käyrä funktion f määrittelyalueella. Jos merkitään

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} f(\tilde{z}_m)\Delta z_m,$$



jossa Δz_m on käyrän osituksen $(\{z_0 = a, z_1, z_2, \ldots, z_n = b\})$ pätkän $z_{m-1} \to z_m$ (jolla $\tilde{z}_m$ on) pituus. Ositus on hienontuva: vaaditaan, että kun $n \to \infty$, $\max_m \Delta z_m \to 0$. Silloin saadaan:

$$S_n \to \int_C f(z)dz \ .$$

Rajan olemassaolo palautuu reaaliseen integrointitulokseen, sillä

$$S_n = \sum (u+iv)(\Delta x + i\Delta y) = \sum (u\Delta x - v\Delta y) + i\sum (u\Delta y + v\Delta x).$$

Integraalille pätee tutut ominaisuudet

- Lineaarisuus: $\int (\alpha f + \beta g)dz = \alpha \int fdz + \beta \int gdz$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$,
- Polkusummaus: $\int_{C_1 \cup C_2} fdz = \int_{C_1 + C_2} fdz = \int_{C_1} fdz + \int_{C_2} fdz$,
- Integrointisuunnan kääntäminen: $\int_C fdz = -\int_{-C} fdz$.

Lause

Jos $C = \{z(t) \mid t \in I\}$ on sileä polku a:sta b:hen ja f jatkuva C:llä niin pätee $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt$.

Todistetaan sijoituksella ja palautuksella reaaliseen.

Esimerkkejä: 1. Tarkastellaan yksinkertaista funktioperhetta

$$f_m(z) = (z - z_0)^m, \ \ m \in \mathbf{Z}$$

polulla $C = \{z \mid |z - z_0| = \rho\}$. Jälkimmäinen parametrisoituu helposti, $z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \sin t) = z_0 + \rho e^{it}, \ \ t \in [0, 2\pi)$, joten

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{imt} \quad ja \quad dz = i\rho e^{it} dt \ .$$

Siten (vastapäivään ympyrä kiertäen)

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i\rho e^{it} dt$$

$$= i\rho^{m+1} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos{(m+1)t} dt + i \int_0^{2\pi} \sin{(m+1)t} dt \right\} \ .$$

Tapaukset:

- $m \neq -1$: $\int_0^{2\pi} \cos nt dt = 0 = \int_0^{2\pi} \sin nt dt$ (nyt siis $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$).
- $m = -1$: $\int_0^{2\pi} \cos 0 dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \quad ja \quad \int_0^{2\pi} \sin 0 dt = 0$

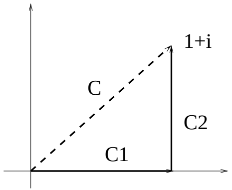
eli

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i, \ kun \ m = -1 \\ 0, \ kun \ m \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\} \ . \end{cases}$$

Huomioita edellisestä:

- Tulos ei riipu ollenkaan ympyrän säteestä!
- Tärkeä erikoistapaus on $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$. Muistetaan, että $\frac{1}{z}$ oli logaritmin derivaatta. Logaritmi on monikäsitteinen funktio, mutta jos siitä käytetään yksiarvoisuuden nimissä vain argumentin päähaaraa, on sillä täsmalleen $2\pi i$ suuruinen hyppäys, kun kierrytään origon ympäri negatiivisen reaaliakselin yli. Integraali laskee siis juuri tämän argumentin kertymän.

2. Yleisesti integraali riippuu polusta. Jos vaikkapa $f(z) = \Re(z) = x$ ja polut ovat kuvan mukaisia, joko $C = t(1+i),\ t \in [0,1]$ tai $C_1 \cup C_2$, jossa $C_1 = t,\ t \in [0,1]$ ja $C_2 = 1 + it,\ t \in [0,1]$, saadaan:



$$\int_{C_1} xdz = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} \ ja \ \int_{C_2} 1dz = \int_0^1 idt = i$$

joten $\int_{C_1 \cup C_2} fdz = \frac{1}{2} + i$, kun taas $\int_C xdz = \int_0^1 t(1+i)dt = \frac{1}{2}(1+i)$.

Jos kuitenkin funktio on “siisti”, niin myöhemmin osoitetaan, että

Lause (Kompleksi-integroinnin peruslause)

Jos f on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa D, niin on siinä olemassa f:n integraalifunktio F, jolle pätee $F' = f$. Kun $z_0, z_1 \in D$ ja C yhdistää ne alueessa kulkien, niin voidaan laskea

$$\int_C f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)\ .$$

Esimerkkejä: 1. Kokonaiselle funktiolle $f(z) = z$ pätee $\oint_{|z|=1} zdz = \frac{1}{2}z^2\Big|_{1+i\epsilon}^{1-i\epsilon} \to 0$ kun $\epsilon \downarrow 0$, kun siis polku kuroo 1:n ympäristössä pienen kaulan kiinni.

2. Toisaalta jos $g(z) = \frac{1}{z}$ olisi analyyttinen jossain origokeskisessä kiekossa ja C_1 sen pohjoinen ja C_2 eteläinen itäänpäin orientoitu kaari, pätisi lauseen nojalla

$$\int_{C_1} gdz = \int_{C_2} gdz \Rightarrow 0 = \int_{C_1} gdz - \int_{C_2} gdz = \int_{C_1 - C_2} gdz = \oint_{|z|=1} gdz = i2\pi\ ,$$

joka on ristiriita, joten analyyttisyys ei päde origossa. Notaatio $-C$ merkitsee siis käännettya orientaatiota. Oletusorientaatio suljetuille poluille on vastapäivään.

Lause (ML-estimaatti)

$$\left| \int_C f dz \right| \leq ML, \quad jossa \quad M = \max_{z \in C} |f(z)| \text{ } ja \text{ } L = Pituus(C) \text{ } .$$

Todistus suoraan määritelmästä: $|S_n| \leq M \sum |\Delta z_m|$.

Lause (ML-estimaatti)

$$\left|\int_C f dz\right| \leq ML, \quad jossa \quad M = \max_{z\in C}|f(z)| \; ja \; L = Pituus(C) \; .$$

Todistus suoraan määritelmästä: $|S_n| \leq M \sum |\Delta z_m|$.

Seuraavaksi palautetaan mieleen eräs tärkeä reaalinen tulos.

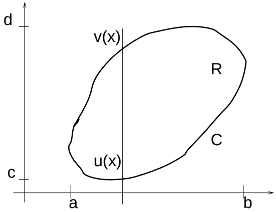
Lause (Greenin lause)

Olkoon R suljettu tason joukko, jonka reuna C koostuu äärellisestä määrästä sileitä käyriä. Jos $F_1(x,y)$ ja $F_2(x,y)$, kuten myös $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ ja $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ ovat jatkuvia, niin pätee

$$\int\int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy) \; ,$$

jossa C on orientoitu siten että R on sen vasemmalla puolella.

Todistus: Todistetaan ensin helpolle tasoalueelle R, jolla on olemassa reunakäyrät u, v (pystyyn) ja p, q (vaakaan). Tällöin siis



$$\begin{cases} a \le x \le b: \; u(x) \le y \le v(x) \; (I) \\ c \le y \le d: \; p(y) \le x \le q(y) \; (II) \end{cases}$$

Huomataan, että

$$\int\int_R \frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy \right\} dx$$

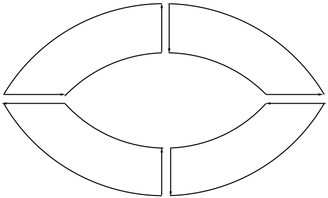
$$= \int_a^b \{F_1(x, v(x)) - F_1(x, u(x))\} \, dx$$

$$= -\int_b^a F_1(x, v(x))dx - \int_a^b F_1(x, u(x))dx = -\oint_C F_1(x, y)dx \; (1)$$

Vastaavasti reunoilla (II) voidaan johtaa esitys

$$\int\int_R \frac{\partial F_2}{\partial x} dxdy = \ldots = \oint_C F_2(x, y)dy \ . \qquad (2)$$

(1) ja (2) siis yhdessä antavat Greenin kaavan perustapauksessa. Yleisessä tapauksessa alue pilkotaan tällaisiin yksinkertaisiin alueisiin, joiden reunoilla huomioidaan summauksessa vastakkaisesti orientoituneet polunpätkät. QED



Sanotaan, että **polku on yksinkertainen**, jos se ei leikkaa itseään.

Lause (Cauchyn integraalilause)

Jos f on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa D, niin sen jokaiselle suljetulle, yksinkertaiselle polulle C pätee $\oint_C f dz = 0$.

Todistus: $\oint_C f dz = \oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (udy + vdx)$, jossa u:lla ja v:lla on jatkuvat osittaisderivaatat koska f on analyyttinen. Siten Greenin kaavan ja Cauchy-Riemannin yhtälöiden nojalla

$$\oint_C (udx - vdy) = \int\int_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0 \ .$$

Yllä R on C:n rajaama alue D:ssä. Samalla tavoin

$$\oint_C (udy + vdx) = \int\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0 \ ,$$

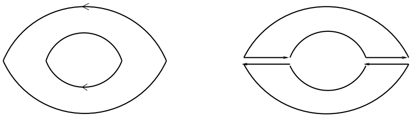
jossa nyt integroitava häviää toisen C-R yhtälön nojalla. QED

Seurauslause

Jos f on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa, on sen integraali polusta riippumaton.

Seurauslause

Jos funktio on analyyttinen rengasalueen sisältävässä alueessa, ovat sen integraalit renkaan reunojen yli samat.



Esimerkki: Suljetut polut C_1 ja C_2 ovat **homotooppisia**, jos ne voidaan alueessa pysyen jatkuvasti muuntaa toisikseen. Yllä ulkoreuna voidaan jatkuvasti kutistaa sisäreunaksi, alueessa pysyen, joten reunat ovat homotooppisia.
Huomaa erityisesti, että $\oint_C z^m dz = \oint_{|z|=1} z^m dz,\ m \in \mathbf{Z}$ (laskettu edellä) mille tahansa origon kiertävälle suljetulle, yksinkertaiselle polulle C.

Todistus: Cauchy integraalilauseen hypoteesi on voimassa, joten sen nojalla polkuriippumattomuus on selvä. Erityisesti funktio $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$ on yksikäsitteisesti määritelty. Tutkitaan sen erotusosamäärää:

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \ldots = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(w)dw \ .$$

Kiinnitetään z tilapäisesti ja valitaan pieni Δz siten, että $z + \Delta z \in D$ (D on avoin). Silloin

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dw = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} dw = f(z)\Delta z$$

eli $f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dw$ ja edelleen

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \left(f(w) - f(z)\right) dw \ .$$

Koska f on analyyttinen, on se erityisesti jatkuva ($\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ siten että $|z' - z| < \delta \Rightarrow |f(z') - f(z)| < \epsilon$). Siten jos $|\Delta z| < \delta$, saadaan ML-epäyhtälön nojalla

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\epsilon|\Delta z| = \epsilon$$

ja erotusosamäärän raja on olemassa ja se on f. Jos on olemassa toinen G siten että $G' = f$, on $F - G$ vakio D:ssä ja peruslauseen kaava toimii myös sille. QED saadaan ML-epäyhtälön nojalla

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\epsilon|\Delta z| = \epsilon$$

ja erotusosamäärän raja on olemassa ja se on f. Jos on olemassa toinen G siten että $G' = f$, on $F - G$ vakio D:ssä ja peruslauseen kaava toimii myös sille. QED

Lause (Cauchyn integraalikaava)

Olkoon f analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa D. Jos $z_0 \in D$ ja suljettu D:n polku C kiertää z_0:n vastapäivään, niin pätee

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = i2\pi f(z_0)\ .$$

Todistus, idea: Koska $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$, saadaan

$$(*) \qquad \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_C \frac{dz}{z - z_0} + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \ .$$

Keskimmäinen integraali on $i2\pi$. Jatkuvuuden nojalla sopivalla $\delta > 0$ on kiekossa $|z - z_0| < \delta$ voimassa raja $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, joten ρ-kehällä $|z - z_0| = \rho$ pätee

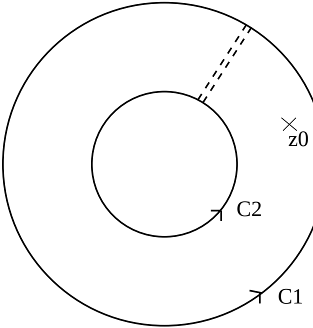
$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{\rho}$$

kun $\rho < \delta$. Siten ML-epäyhtälön nojalla saadaan $(*)$ viimeinen integraali rajattua mielivaltaisen pieneksi:

$$\left| \oint_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho < 2\pi\epsilon \ .$$

QED

Cauchyn integraalikaava, yleistys annulukseen



Leikkauksella (katkoviivat) voidaan integraali ei-yhdesti yhtenäisessä alueessa palauttaa perustapaukseen ja saadaan

$$\oint_{C_1 - C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i2\pi f(z_0) \ .$$

Esimerkkejä: 1. Integraalissa $I = \oint_C \frac{z+1}{z-1}\,dz$ integroitavana on rationaalifunktio $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$, jolla on yksinkertainen napa pisteessä $z_0 = 1$. Integraalin arvo riippuu nyt täysin siitä, missä suhteessa polku C on tähän erikoispisteeseen. Esimerkkejä:

- Jos $C = C_r = \{z \mid |z| = r\}$ ja $r = \frac{1}{2}$, on $I = 0$ Cauchyn integraalilauseen nojalla.
- Jos $r = \frac{3}{2}$, on $I = i2\pi(1+1) = i4\pi$ Cauchyn integraalikaavan nojalla.
- Jos $r = 1$, on integraali määrittelemätön, koska singulariteetti on polulla. Samoin käy, jos esimerkiksi $C = \{z \mid |z-2| = 1\}$.
- Jos $C = \{z \mid |z-2| = \frac{1}{2}\}$, häviää integraali jälleen Cauchyn integraalilauseen nojalla.

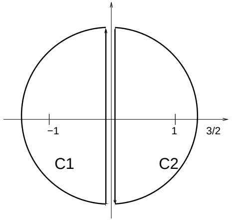
2. Tarkastellaan seuraavaksi integraalia $I = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\tan z}{z^2-1}\,dz$. Ensimmäiseksi on selvitettävä singulaariteetit ja niiden asema integrointipolkuun nähden. $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ erikoispisteet ovat kosinin nollakohdat eli $z = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$. Onneksemme $\pi > 3$, joten nämä ovat kaikki integrointipolun ulkopuolella. Toisaalta $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$, joten sen molemmat juuret ± 1 ovat polun sisällä. Osamurtokehitetään se:

$$\frac{1}{z^2-1} = \ldots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) .$$

Siten

$$I = \frac{1}{2}\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\tan z}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\tan z}{z+1}\,dz = i\pi(\tan 1 - \tan(-1)) = i2\pi \tan 1 .$$

Integraalin voi laskea myös osamurtohajottamatta, polkua sopivasti editoimalla. Jos esitetään polku $\{z \mid |z| = \frac{3}{2}\} = C_1 + C_2$ kuten kuvassa, on kummankin puoliympyrän sisällä tasan yksi yksinkertainen napa. Tällöin esimerkiksi



$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{\tan z}{z^2 - 1}\, dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{\tan z}{z-1}}{z+1}\, dz$$
$$= i2\pi \frac{\tan z}{z-1}\Big|_{z=-1} = i\pi \tan 1 \; .$$

Toinen integraali samalla tavoin ja $I = I_1 + I_2$.

3. Samaa tekniikkaa voi hyödyntää esimerkiksi integraalin $I = \oint_C \frac{2z dz}{(z-1)(z+2)(z+i)}$, jossa vastapäivään kulkeva yksinkertainen C sulkee sisäänsä kaikki navat -2, 1 ja $-i$, laskemisessa. Polun voi nyt pikkoa ylläolevaan tapaan osiin C_i, $i = 1, 2, 3$, jotka summautuvat C:hen ja kukin niistä sisältää vain yhden navoista. Näin tehden

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{2z dz}{(z-1)(z+2)(z+i)} = i2\pi \frac{2z}{(z-1)(z+i)}\Big|_{z=-2} = -\frac{i8\pi}{3(2-i)},$$
$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{2z dz}{(z-1)(z+2)(z+i)} = i2\pi \frac{2z}{(z-1)(z+2)}\Big|_{z=-i} = -\frac{4\pi}{(1+i)(2-i)} \quad ja$$

$$I_3 = \oint_{C_3} \frac{2zdz}{(z-1)(z+2)(z+i)} = i2\pi \frac{2z}{(z+2)(z+i)}\Big|_{z=1} = \frac{i4\pi}{3(1+i)} \ .$$

$I = I_1 + I_2 + I_2 = 0$, mutta häviäminen **ei ole seurausta Cauchyn integraalilauseesta!**

$$I_3 = \oint_{C_3} \frac{2z dz}{(z-1)(z+2)(z+i)} = i2\pi \frac{2z}{(z+2)(z+i)}\Big|_{z=1} = \frac{i4\pi}{3(1+i)} \ .$$

$I = I_1 + I_2 + I_2 = 0$, mutta häviäminen **ei ole seurausta Cauchyn integraalilauseesta!**

Lause (Derivaattalause)

Jos f on analyyttinen alueessa D, sillä on kaikkien kertalukujen derivaatat, joiden arvot voidaan laskea kaavasta

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{i2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \ , \ \ n = 0, 1, 2, \dots ,$$

jossa D:n polku C kiertää z_0:n vastapäivään.

Lause siis yleistää Cauchyn integraalikaavan (tapaus $n = 0$, muistetaan, että kertomalle määritellään $0! = 1$).

Todistus: Käsitellään tapaus $n = 1$, korkeammat derivaatat seuraavat siitä induktiolla. Cauchyn integraalikaavalla saadaan

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{i2\pi\Delta z}\oint_C\left[\frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}-\frac{f(z)}{z-z_0}\right]dz\\ &= \frac{1}{i2\pi}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz\ ,\end{aligned}$$

jonka erotus derivaattakaavan kanssa on

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i2\pi}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz-\frac{1}{i2\pi}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\\ &= \frac{1}{i2\pi}\oint_C\frac{f(z)\Delta z dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\ .\end{aligned}$$

Koska f on analyyttinen, on se C:lla rajoitettu, $|f| \leq K$. Olkoon $d = d(z_0, C)$ z_0:n etäisyys käyrästä C. Silloin $\frac{1}{|z-z_0|^2} \leq \frac{1}{d^2}$ ja edelleen kolmioepäyhtälön nojalla

$$d \le |z - z_0| = |z - z_0 - \Delta z + \Delta z| \le |z - z_0 - \Delta z| + |\Delta z| \ ,$$

joten $d - |\Delta z| \le |z - z_0 - \Delta z|$ ja jos $|\Delta z| \le \frac{d}{2}$, niin edelleen $\frac{d}{2} \le d - |\Delta z| \le |z - z_0 - \Delta z|$, joten

$$\frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \le \frac{2}{d} \ .$$

Niinpä ML-epäyhtälön nojalla (L on C:n pituus) saadaan

$$\left| \oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} \right| \le K \frac{2}{d} \frac{1}{d^2} L |\Delta z| \to 0,$$

kun $\Delta z \to 0$. QED

Seurauslause (Cauchyn epäyhtälö)

Jos C on r-säteinen z_0-keskinen ympyrä ja jos $|f| \leq M$ C:llä, niin

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n} \ .$$

Todistus:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}$$

Derivaattalauseen nojalla. QED

Huomataan myös, että jos f on rajoitettu kokonainen funktio, niin on olemassa $K < \infty$ siten, että $|f(z)| \leq K, \ \forall z \in \mathbf{C}$. Ylläolevan nojalla silloin $|f'(z_0)| \leq \frac{K}{r}$, joka on siis totta kaikille $r > 0$. Siten $|f'(z_0)| = 0$ kaikille z_0, joten funktio f on vakio. Olemme näin todistaneet jo aiemmin mainitun **Liouvillen lauseen**.

Edeltävä puolestaan antaa hyvin helpon todistuksen algebran peruslauseelle:

Olkoon $P(z)$ polynomi, jonka aste n on vähintään 1. Jos P:llä ei olisi nollakohtaa **C**:ssä, olisi funktio $\frac{1}{P(z)}$ kokonainen. Toisaalta $P(z) \to \infty$ eli $\frac{1}{P(z)} \to 0$, kun $z \to \infty$. Koska $\left|\frac{1}{P(z)}\right|$ on jatkuva, on silla äärellinen maksimi, joten Liouvillen lauseen nojalla $\frac{1}{P}$ on vakio. Tämä on ristiriita, joten yhtälöllä $P(z) = 0$ on oltava juuri. Kun juuri z_1 on näin löydetty, voidaan kirjoittaa $P(z) = (z - z_1)P_1(z)$, jossa P_1:n aste on $n - 1$. Jos $n - 1 > 1$, toistetaan edelläoleva argumentti, kunnes kaikki n juurta on löydetty.

Lause (Algebran peruslause)

n:nnen asteen polynomilla on tasan n juurta kompleksitasossa.

Eräs tärkeä sovellutus Derivaattalauseelle on Taylorin sarjat. Standardioletusten vallitessa on analyyttinen funktio f esitettävissä Cauchyn integraalikaavalla $f(z) = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw$, jossa C olkoon a-keskinen ympyrä ja z sen sisällä. Voidaan alkaa kehittää

$$(*) \qquad \frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{(w-a)\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)} \ .$$

Nyt pätee $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$ ja kun muistetaan, että geometrisen sarjan summakaava on $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}$, saadaan

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = 1 + \frac{z-a}{w-a} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n + \frac{\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n+1}}{\frac{w-z}{w-a}} \ .$$

Jos tämä nyt sijoitetaan $(*)$:een ja edelleen Cauchyn integraalikaavaesitykseen f:lle, saadaan

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(w)}{w-a} dw &+ \frac{z-a}{i2\pi} \oint_C \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw + \ldots \\ &+ \frac{(z-a)^n}{i2\pi} \oint_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw + R_n(z) \ . \quad (\star) \end{aligned}$$

Edellä jäännöstermi on

$$R_n(z) = \frac{(z-a)^{n+1}}{i2\pi} \oint_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw \ .$$

Kehitelmän ($\star$) integraalit voidaan nyt identifioida Derivaattalauseen avulla ja sarja kirjoittaa tutumpaan muotoon

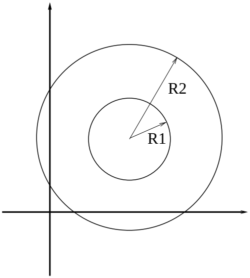
$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(z) \ ,$$

joka on siis analyyttisen funktion f Taylorin sarja kehityskeskipisteessä a.

Jotta sarja suppenisi, tarvitaan $R_n(z) \to 0$ kun $n \to \infty$. Tämä seuraa ML-epäyhtälöstä ja samantyyppisista epäyhtälöistä, kuin Derivaattalauseen todistuksessa (yksityiskohdat esim. Kreyszigissa). Potenssisarjan yksikäsitteisyyden nojalla (annetussa kehityskeskipisteessä) kyseessä on f:n ainoa suppeneva potenssisarja a:ssa.

Jos f on analyyttinen kuvan mukaisessa renkaassa, muistetaan, että sen Laurent-kehitelmä on

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \ .$$



Osoittautuu, että (C vastapäivään annuluksessa)

$$\begin{aligned} c_n =& \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \ \ n \geq 0 \quad ja \\ c_n =& \frac{1}{i2\pi} \oint_C (w-a)^{-n-1} f(w) dw, \ \ n \leq -1 \ . \end{aligned}$$

Olkoot annuluksen sisä- ja ulkoreunat vastaavasti C_1 ja C_2, molemmat orientoitu vastapäivään. Cauchyn integraalikaava saa renkaassa muodon

$$(\circ) \qquad f(z) = \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)} dw - \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)} dw$$

Koska z on C_2:n sisällä, edeltävän Taylor-argumentin mukaisesti saadaan kertoimille $c_n, \ n \geq 0$ esitys kuten yllä (huomaa, että polku voidaan kutistaa C_2:sta C:hen koska $\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}$ on analyyttinen alueessa).

Esityksen ($\circ$) jälkimmäinen integraali kehitetään jälleen geometrisella sarjalla, mutta nyt huomioiden, että $\left|\frac{w-a}{z-a}\right| < 1$. Samaan tapaan kuin Taylorin yhteydessä saadaan nyt tämän kehitelmän integraalina

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{i2\pi}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{i2\pi}\left\{\frac{1}{z-a}\oint_{C_1} f(w)dw + \frac{1}{(z-a)^2}\oint_{C_1}(w-a)f(w)dw + \ldots\right. \\
\left. + \frac{1}{(z-a)^{k+1}}\oint_{C_1}(w-a)^k f(w)dw + T_k(z)\right. .
\end{aligned}
$$

jossa jäännöstermi on

$$
T_k(z) = \frac{1}{i2\pi(z-a)^{k+1}}\oint_{C_1}\frac{(w-a)^{k+1}}{z-w}f(w)dw .
$$

Kun palautetaan indeksointi alkuperäiseen, $-(k+1) = n$ eli $k = -n-1$, voidaan kehitelmän kertoimet c_n, $n \leq -1$ lukea yltä. Huomaa, että jälleen voidaan siirtyä polulta C_1 polulle C (homotopia analyyttisyysalueella) ja jäännöstermi rajoittaa standardiestimaatein siten, että $|T_k(z)| \to 0$, kun k kasvaa. Näin ollen Laurent-kehitelmän kaikki kertoimet ovat yksikäsitteisesti määrätty.

Analyyttisen funktion Laurent-sarja on yksikäsitteinen suppenemisannuluksessa. Mutta toisin kuin Taylor, Laurent-sarja annetulla kehityskeskipisteellä ei ole yksikäsitteinen.

Esimerkki: Olkoon $I_m = \oint_C (z - z_0)^m dz = \oint_C \frac{(z-z_0)^{m+1}}{z-z_0} dz$, jossa C kiertää z_0:n vastapäivään. Siten

- jos $m = -1$, niin $I_{-1} = i2\pi$,
- jos $m \geq 0$, niin $f_m(z) = (z - z_0)^{m+1}$ on analyyttinen ja Cauchyn integraalikaava (tai Derivaattalause) antaa $\oint_C \frac{f_m(z)}{z-z_0} dz = 0$,
- jos $m \leq -2$, $I_m = \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{-m}} = \frac{i2\pi}{(-m-1)!} f^{(-m-1)}(z_0)$, jossa $f(z) \equiv 1$ ja $-m-1 \geq 1$. Mutta tällöin f on analyyttinen ja sen kaikki positiiviset derivaatat häviävät, joten siis $I_m = 0$.

Esimerkki: Olkoon $I_m = \oint_C (z - z_0)^m dz = \oint_C \frac{(z-z_0)^{m+1}}{z-z_0} dz$, jossa C kiertää z_0:n vastapäivään. Siten

- jos $m = -1$, niin $I_{-1} = i2\pi$,
- jos $m \geq 0$, niin $f_m(z) = (z - z_0)^{m+1}$ on analyyttinen ja Cauchyn integraalikaava (tai Derivaattalause) antaa $\oint_C \frac{f_m(z)}{z-z_0} dz = 0$,
- jos $m \leq -2$, $I_m = \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{-m}} = \frac{i2\pi}{(-m-1)!} f^{(-m-1)}(z_0)$, jossa $f(z) \equiv 1$ ja $-m - 1 \geq 1$. Mutta tällöin f on analyyttinen ja sen kaikki positiiviset derivaatat häviävät, joten siis $I_m = 0$.

Lause (Morera)

Jos f on jatkuva yhdesti yhtenäisessä alueessa D ja $\oint_C f dz = 0$ jokaiselle suljetulle polulle C D:ssä, niin f on analyyttinen.

Tod., idea: Määritellään $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w) dw$, jossa f on jatkuva. F on polkuriippumaton, joten se on analyyttinen (peruslauseen todistus). Edellisen lauseen nojalla $F' = f$ on analyyttinen. QED

Kun f on analyyttinen alueessa D ja C suljettu polku siinä, tiedetään, että $\oint_C f dz = 0$. Jos f:lla on napa tai oleellinen erikoispiste D:n pisteessä z_0, on funktiolla jossain z_0-keskisessä renkaassa suppeneva Laurent-kehitelmä $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$. Jos sarja integroidaan termeittäin, edellaolevan perusteella tiedetään, että ainoastaan $\oint_C (z-z_0)^{-1} dz \neq 0$ ja saadaan $\oint_C f dz = i2\pi c_{-1}$. Integraalin $\oint_C f dz$ arvo ratkeaa siis yhdestä ainoasta Laurent-kehitelmän kertoimesta!

Määritelmä

Jos C kiertää z_0:n alueessa D, kutsutaan Laurent-kehitelmän kerrointa c_{-1} funktion f **residyksi**, *$Res_{z=z_0} f(z)$, pisteessä z_0.*

Kertaa residyjen laskentakaavat luentojen aiemmasta sarjaosasta.

Lause (Residylause)

Jos f on analyyttinen alueessa D, paitsi äärellisessä määrässä erikoispisteitä $\{z_j\}_1^m$, jotka ovat integroimispolun C sisäpuolella, pätee

$$\oint_C f(z)dz = i2\pi \sum_{j=1}^{m} Res\, f(z_j) \ .$$

Todistus: "Leikkaa ja liimaa"-argumentti: Olkoon C_j z_j-keskinen ympyrä, joka on D:ssä, eikä leikkaa muita ympyröitä, eikä C:ta, $j = 1, \ldots, m$. Jos C_j:t orientoidaan myötäpäivään (ja C edelleen vastapäivään), pätee Cauchyn integraalilauseen nojalla $\oint_C fdz + \sum_{j=1}^m \oint_{C_j} fdz = 0$, koska f on D:ssä erikoispisteittensä ulkopuolella analyyttinen. Jos nyt jokaisen C_j:n orientaatio käännetään, saadaan kaava. QED

Esimerkki: 1. Evaluoidaan

$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3(z^2+2z+2)} \ .$$

Rationaalinen integroitava on analyyttinen koko kompleksitasossa, paitsi navoissaan, jotka ovat $z=0$, kolminkertainen, ja $-1 \pm i$, molemmat yksinkertaisia. Erikoispisteet ovat selvästi polun sisällä, joten integraalia varten tarvitaan residyt kaikissa. Origossa kalvon L2.22 kaavan nojalla saadaan

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{1}{z^2+2z+2} \right] = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{-(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2} \right] = \ldots = \frac{1}{4} \ .$$

Navassa $-1-i$ pätee

$$\lim_{z\to -1-i} (z+1+i) \frac{1}{z^3(z+1+i)(z+1-i)} = \lim_{z\to -1-i} \frac{1}{z^3(z+1-i)} = \ldots = \frac{1}{8}(-1+i) \ .$$

Navassa $-1+i$ residy saadaan edellisestä helposti konjugoimalla: $\frac{1}{8}(-1-i)$.
Siten integraalin arvoksi tulee Residylauseen nojalla $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}(-1+i) + \frac{1}{8}(-1-i) = 0$.

2. Olkoon meromorfifunktiolla f yhdesti yhtenäisessä alueessa D kulkevan suljetun polun C sisällä navat $b_1, \ldots, b_n$ kertaluvuilla $k_1, \ldots, k_n$ ja nollakohdat $a_1, \ldots, a_m$ kertaluvuilla $l_1, \ldots, l_m$. Tarkastellaan funktion $\frac{f'}{f}$ singulariteetteja.
Jos f:llä on kertalukua l oleva nollakohta a:ssa, voidaan se kirjoittaa $f(z) = (z-a)^l g(z),\ g(a) \neq 0$. Siten $f'(z) = l(z-a)^{l-1}g(z) + (z-a)^l g'(z)$, josta edelleen

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{l}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad joten \quad Res_{z=a}\frac{f'(z)}{f(z)} = l\ .$$

Jos taas f:lla on k-kertainen napa b:ssa, saadaan samanlaisella argumentilla

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{k}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \quad josta \quad Res_{z=b}\frac{f'(z)}{f(z)} = -k\ .$$

Integroimalla Residylauseen avulla saadaan näistä **Argumentin periaate:**

$$\frac{1}{i2\pi}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{m} l_i - \sum_{j=1}^{n} k_j\ .$$

Nimi johtuu siitä, että vasen puoli on $\frac{1}{i2\pi}\oint_C d\ln f = \frac{1}{i2\pi}\Delta \arg f(C)$, joka kertoo sen, kuinka paljon f:n vaihekulma muuttuu, kun kierretään C kertaalleen.

Eräitä reaalisia integraaleja voidaan laskea (kenties ainoastaan tai ainakin helpommin) kompleksi-integraalien kautta. Seuraavassa muutamia tyyppejä.

1. Integraali on muotoa

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta \ ,$$

jossa R on reaalinen rationaalifunktio. Jos tähän sijoitetaan $e^{i\theta} = z$ (jolloin $dz = ie^{i\theta}d\theta$) ja edelleen huomataan, että $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ ja $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, säilyy integroitava rationaalisena ja saa muodon

$$\oint_{|z|=1} f(z)\frac{dz}{iz} \ .$$

Esimerkki: Lasketaan

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta} \ .$$

Kun tehdään edellä olevat sijoitukset, saadaan (C on yksikköympyrä)

$$I = \oint_C \frac{dz}{iz[2 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})]} = \frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{z^2 + 4z + 1} \ .$$

Nimittäjän nollakohdat ovat $-2 \pm \sqrt{3}$, joista toinen on C:n sisällä. Residy $-2 + \sqrt{3}$:ssä:

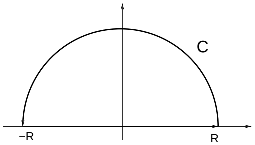
$$\lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \left[\frac{2}{i}(z + 2 - \sqrt{3}) \frac{1}{z^2 + 4z + 1} \right] = \frac{1}{i\sqrt{3}} \ .$$

Siten Residylauseen nojalla $I = i2\pi \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

2. Jos laskettava integraali on muotoa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \ ,$$

voidaan se usein hallita siirtymällä kompleksi-integraaliin yli suljetun polun ja ottamalla raja $R \to \infty$.



Onnistumisen edellytyksenä on, että hajoitelmassa

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C:n\ \ kaari} f(z)dz$$

pätee:

1. residyt C:n sisällä on laskettavissa ja
2. integraali yli C:n kaariosan (puoliympyrä tai muu sopiva käyrä) häviää, kun $R \to \infty$.

Keskeinen tapaus, joissa kohta 2 saadaan toimimaan on se, jossa voidaan rajoittaa $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^2}$, sillä R-säteisen C:n kaaren pituus on πR, joten silloin (kun $R \to \infty$)

$$\left|\int_{C:n\ \ kaari} f(z)dz\right| \leq \frac{K}{R^2}\pi R = \frac{\pi K}{R} \to 0$$

Esimerkki: Lasketaan $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$. Nyt integroitavan navat ovat $\pm 2i$, kumpikin toisen asteen. Näistä vain ylemmän puolitason $2i$ on polun sisällä ja residy siinä on

$$\lim_{z\to 2i} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}(z-2i)^2\frac{1}{(z^2+4)^2} = \lim_{z\to 2i} \frac{-2}{(z+2i)^3} = -\frac{i}{32}\ .$$

Siten Residylauseen nojalla $\oint_C \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}$. Toisaalta nyt $\left|\frac{1}{(z^2+4)^2}\right| \leq \frac{4}{|z|^4}$ riittävän suurella kaarella, joten $\left|\int_{C:n\ \ kaari} \frac{dz}{(z^2+4)^2}\right| \leq \frac{4}{R^4}\pi R \to 0$, kun $R \to \infty$. Siten alkuperäisen integraalin arvo $I = \frac{\pi}{16}$.

(Integraalin voi laskea myös reaalisena esim. sijoituksella $x = 2\tan\theta$.)

2'. (Variaatio edellisestä) Myös muotoa $\int_0^\infty f(x)dx$ olevia integraaleja voidaan selvittää, jos symmetriat sallivat.

Esimerkki: $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ ratkeaa, kun ensin tajutaan, että integroitava on parillinen, joten siis yhtäpitävästi

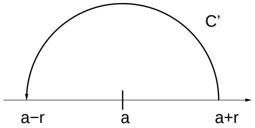
$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} \ .$$

Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ navat ovat neljännet juuret luvusta $-1 = e^{i\pi}$ eli $z_j = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+j\frac{\pi}{2}\right)}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Näistä kaksi ensimmäistä pysyy ylemmän puolitason R-säteisen puoliympyrän sisällä kun $R \to \infty$. Vastaavat residyt ovat

$$\begin{aligned} Res_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} f(z) &= \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = -\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ja \\ Res_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} f(z) &= \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad joten \end{aligned}$$

suljettu polkuintegraali antaa $i2\pi\left(-\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \ldots = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Integraali yli kaariosan häviää asymptoottisesti kun R kasvaa, koska integroitava on rationaalinen ja em. nimittäjän kasvuehto on voimassa. Kun kaaren säde lähetään äärettömään saadaan siis $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3. Jos reaali-intergraalin integroitavalla $f(z)$ on yksinkertainen napa reaaliakselilla (piste a oikealla), voidaan integraali usein silti laskea residyilla. Tällöin a:ssa



$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z) \ ,$$

jossa g on analyyttinen ja kuten tiedetään $c_{-1} = Res_{z=a} f(z)$. Kuvan integrointipolku C' on $z(t) = a + re^{it},\ t \in [0, \pi]$, joten

$$\int_{C'} f(z)dz = \int_0^{\pi} \frac{c_{-1}}{re^{it}} ire^{it} dt + \int_{C'} g(z)dz.$$

Viimeisin integraali häviää ML-epäyhtälön nojalla kun $r \downarrow 0$ ja keskimmäinen antaa $i\pi c_{-1}$. Siten edellisiä integrointitekniikoita voidaa soveltaa myös tapaukseen, jossa integroitavalla on polulla yksinkertainen napa: **jokainen yksinkertainen napa z' polulla (sen sileällä osalla) tuottaa residysummaan lisän $i\pi Res_{z=z'}(z)$.**

Esimerkki: 1. Laske

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} \; .$$

Termi x^2+1 antaa kompleksinavat $\pm i$, joten ylemmän puolitason R-säteisessä puoliympyrässä on kolme napaa, joista kaksi reaaliakselilla. Residyt integrandin $f(z)$ navoissa:

$$Res_{z=1} f(z) = \frac{1}{(z-2)(z^2+1)}\Big|_{z=1} = -\frac{1}{2} \; ,$$

$$Res_{z=2} f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}\Big|_{z=2} = \frac{1}{5} \quad ja$$

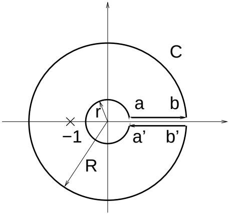
$$Res_{z=i} f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z+i)}\Big|_{z=i} = \frac{3-i}{20}$$

Koska kaari-integraali on jälleen asymptoottisesti häviävä, saadaan I:n arvo residysummasta

$$i2\pi\left(\frac{3-i}{20}\right) + i\pi\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{10} \; .$$

2. Lasketaan

$$I = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x(1+x)}dx,\ 0<\alpha<1.$$



Kun määritellään $f(z) = \frac{z^\alpha}{z(1+z)}$ ja suljettu polku C kuten kuvassa, saadaan $\oint_C f(z)dz = i2\pi Res_{z=-1} f(z) = i2\pi \frac{z^\alpha}{z}\Big|_{z=-1} = -i2\pi e^{i\alpha\pi}$.

Isolla ja pienella "c-kaarella" arvioidaan vastaavasti

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \frac{(2\pi R)R^\alpha}{R(R-1)} \to 0 \quad ja \quad \left|\int_{C_r} f(z)dz\right| \le \frac{(2\pi r)r^\alpha}{r(1-r)} \to 0\ ,$$

kun $R\to\infty$ ja $r\downarrow 0$ (mieti käytetyt epäyhtälöt!).) Polulla $a'b'$ $arg(z) = 2\pi$, joten sillä $z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln z} = e^{(\alpha-1)(\ln x + i2\pi)} = x^{\alpha-1}e^{i(\alpha-1)2\pi} = x^{\alpha-1}e^{i2\alpha\pi}$. Siten C:stä jää

$$\int_a^b f(z)dz + \int_{b'}^{a'} f(z)dz = (1-e^{i2\alpha\pi})\int_r^R \frac{x^\alpha}{x(1+x)}dx\ .$$

Kun $R\to\infty$ ja $r\downarrow 0$, saadaan $I = \frac{-i2\pi e^{i\alpha\pi}}{1-e^{i2\alpha\pi}} = \frac{-2i\pi}{e^{-i\alpha\pi}-e^{i\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$.

Esimerkki: Kompleksilukujonon $\underline{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$) yksipuolinen (vastaavasti kaksipuolinen) **Z-muunnos** eli **diskreetti Laplace-muunnos** on

$$X(z) = \mathcal{Z}(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad \left(X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \right) .$$

Argumentti z on kompleksiluku. Muunnos on tärkea mm. digitaalisessa signaalinkäsittelyssä: signaalin näytejono $\underline{x}$ muunnetaan funktioksi, jota voidaan muokata ja sitten käänteismuuntaa takaisin diskreettiaikaiseksi signaaliksi. Matemaattisesti muunnoksessa on kyse Laurent-sarjasta annetuilla kertoimilla. Kaksipuolinen muunnos palautuu tietenkin yksipuoliseen, jos $x_n = 0, \ \forall n < 0$.

Käänteismuunnos löydetään kun valitaan kokonaisluku k ja hajoitetaan

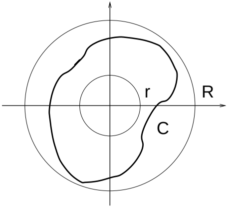
$$X(z)z^{k-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n+k-1} = x_k z^{-1} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq k}}^{\infty} x_n z^{-n+k-1},$$

jolloin

$$\oint_C X(z)z^{k-1}dz = x_k \underbrace{\oint_C \frac{dz}{z}}_{=i2\pi} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq k}}^{\infty} x_n \underbrace{\oint_C z^{-n+k-1}dz}_{=0, \ \forall n\neq k} .$$

Siten käänteismuunnos on

$$x_k = \frac{1}{i2\pi} \oint_C X(z) z^{k-1} dz \ .$$



Polku kaikissa integraaleissa on kuvan mukaisesti Laurent-sarjan suppenemisrenkaassa.

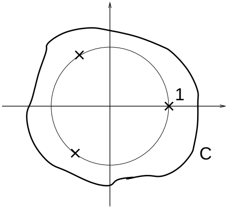
Konkreettisesti, olkoon annettu muunnos $X(z) = \frac{z^3}{z^3 - 1}$. Tästä saadaan nyt poikkeuksellisen helposti nollakeskinen Laurent-sarja:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z^3}} = 1 + \frac{1}{z^3} + \left(\frac{1}{z^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{z^3}\right)^3 + \dots \ .$$

Sarja suppenee, kun $|z| > 1$. Käänteismuunnos voidaan nyt lukea suoraan:

$$x_n = \begin{cases} 1, \ jos \ \ n = 3k, \ \ k \geq 0 \\ 0, \ muuten \ . \end{cases}$$

Yleensä on käytettävä käänteismuunnoksen kaavaa. Edellisen poikkeusargumentin sijasta olisi siis selvitettävä integraalit



$$x_n = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{z^{n+2}}{z^3 - 1} dz \ .$$

Integroitavan navat ovat kuvan mukaiset yksikköjuuret 1 ja $z_\pm = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$ ja polku yksikköympyrän ulkopuolella.

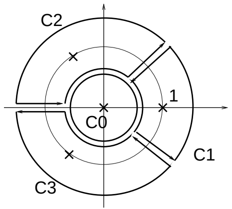
Osamurtokehitelmä on nyt $\frac{1}{z^3-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-z_+} + \frac{D}{z-z_-}$, jossa $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2+z_+}{3(z_- - z_+)}$ ja $D = \frac{2+z_-}{3(z_+ - z_-)}$. Siten kun $n \geq -2$ saadaan Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$\begin{aligned} x_n =& \frac{A}{i2\pi} \oint_C \frac{z^{n+2}}{z-1} dz + \frac{B}{i2\pi} \oint_C \frac{z^{n+2}}{z - z_+} dz + \frac{D}{i2\pi} \oint_C \frac{z^{n+2}}{z - z_-} dz \\ =& \frac{1}{3} + \frac{2 + z_+}{3(z_- - z_+)} z_+^{n+2} + \frac{2 + z_-}{3(z_+ - z_-)} z_-^{n+2} \ . \end{aligned}$$

Symboliohjelmalla on helposti tarkistettavissa, että nämä täsmäävät edellä saatuun.

Kun $n \leq -3$, on integoitavana $\frac{1}{z^k(z^3-1)}$,
$k = -(n+2)$, k saa siis arvot $1, 2, 3 \ldots$ Tällöin

$$x_k = \frac{1}{i2\pi}\left\{\oint_{C_0} + \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}\right\}\frac{dz}{z^k(z^3-1)} ,$$



jossa kaikki polut ovat orientoidut vastapäivään. Olkoot nämä neljä osaa, joiden jokaisen sisällä on tasan yksi navoista, nimeltään $I_0, \ldots, I_3$.
Cauchyn integraalikaavan avulla saadaan

$$I_1 = \frac{1}{i2\pi}\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}\frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)z^k}dz = \ldots = \frac{1}{(1-z_+)(1-z_-)} ,$$

$$I_2 = \frac{1}{i2\pi}\oint_{C_2}\frac{1}{z-z_+}\frac{1}{(z-1)(z-z_-)z^k}dz = \ldots = \frac{1}{(z_+-1)(z_+-z_-)z_+^k} \quad \textit{ja}$$

$$I_3 = \frac{1}{i2\pi}\oint_{C_3}\frac{1}{z-z_-}\frac{1}{(z-1)(z-z_+)z^k}dz = \ldots = \frac{1}{(z_--1)(z_--z_+)z_-^k} .$$

Toisaalta

$$I_0 = \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_0} \frac{1}{z^k} \underbrace{\frac{1}{z^3 - 1}}_{=f(z)} dz = \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(0) \ .$$

Joko manuaalisesti tai symbolisesti derivoimalla huomataan, että $f^{(m)}(0) = -m!$ jos $m = 3l$ ja häviää muuten. Siten

$$I_0 = \begin{cases} -1, \ jos \ k = 3l + 1 \\ \ \ 0, \ muuten \ . \end{cases}$$

I_0 siis häviää positiivisilla k:n arvoilla paitsi jos $k = 1, 4, 7, 10, \ldots$, jolloin se on -1. Kun tämä summataan (mieluiten symbolisesti...) muihin ratkaistuihin integraaleihin, saadaan

$$x_k = I_0 + I_1 + I_2 + I_3 \equiv 0, \quad kun \ k = 1, 2, 3, \ldots$$