Lineaarialgebra ja differentiaaliyhtälöt
MS-C1340, kesä 2014

Kari Eloranta

Matematiikan laitos
Aalto yliopisto

July 21, 2014

Yleiset asiat

- Luennot 5 viikkoa, 5t per viikko:
  ti 12:15-15, ke 10:15-12, D-salissa, viikolla 35 salissa M1.
- Harjoitukset samat 5 viikkoa, 2t per viikko:
  to 10:15-12, salissa D, viikolla 35 salissa M1.
  Kysymykset ja kommentit: `kari.eloranta@aalto.fi`
- Välikokeet: ma 18.8. klo 13-15 ja ma 1.9. klo 13-16.
- Tentti to 4.9. klo 13-16. Muut tentit eivät välttämättä mene täsmälleen kesäkurssin sisällöllä.
- Kurssin tiedoitus, pdf-kalvot etc. vain Noppa-sivun kautta. Luennoilla ja harjoituksissa lisäksi hiukan esimerkkejä ja muuta selvennystä, joka ei välttämättä tule nettiin.
- Vastaanotto luentojen jälkeen.

Kurssin sisältö

1. Matriisilaskennan kertausta
2. Erityisiä matriisityyppejä
3. Matriisiteknologiaa
4. Neliömuodot, hajotelmia
5. Matriisieksponentti
6. Diffentiaaliyhtälösysteemit
7. Kvalitatiivista teoriaa, stabiilisuus
8. Epälineaarisuus, linearisointi

   ... ja jos ehditään, niin lisäksi:
9. Laplace-muunnos ja sen soveltaminen differentiaaliyhtälöihin

Kelpoa lukemista

Viitteitä näihin kalvoilla (ja löytyvät matematiikan kirjastosta):

- Kreyszig: Advanced engineering mathematics, John Wiley. 9 & 10. painokset ok, 8. sisältö ok, numerointi omalla vastuulla.
- Lay: Linear algebra and its applications, 4. painos, Pearson.

- Alestalo-Apiola-Bingham: Lineaarialgebran kertausta, osat 1&2 (Nopassa).
- Eirolan monisteet (3 kpl, Nopassa).

Eli siis mitä?

Hyvin monenlaisissa tilanteissa (luonnontieteissä, insinööritieteissä, taloudessa jne.) voidaan luontevasti päätyä **lineaariseen** matemaattiseen malliin, jossa suureita sitovat ensimmäisen asteen riippuvuudet:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Lineaarialgebra ja sen konkreettisempi muoto, matriisilaskenta, kehittävät menetelmiä tällaisten systeemien ratkaisemiseksi. Tulokset riippuvat monesta asiasta, esimerkiksi siitä, miten ehtojen ja tuntemattomien määrä, m ja n, suhtautuvat toisiinsa.

Toisinaan päädytään matemaattiseen malliin, jossa merkitsevien suureiden $x_j(t), j = 1, \ldots, n$ **muutosnopeudet** määräytyvät suureiden arvoista jonkin lineaarisen lain kautta. On edelleen kyse systeemin, jossa on keskinäisiä lineaaria riippuvuuksia, mallittamisesta. Jatkuva-aikaisena tämä johtaa lineaariseen **differentiaaliyhtälösysteemiin**:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

ja diskreettiaikaisena **differenssiyhtälösysteemiin**:

$$\begin{cases} y_1(i+1) = a_{11}y_1(i) + a_{12}y_2(i) + \cdots + a_{1n}y_n(i) \\ y_2(i+1) = a_{21}y_1(i) + a_{22}y_2(i) + \cdots + a_{2n}y_n(i) \\ \qquad\qquad \vdots \\ y_n(i+1) = a_{n1}y_1(i) + a_{n2}y_2(i) + \cdots + a_{nn}y_n(i) \ . \end{cases}$$

Merkitään $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, $y(i) = (y_1(i), \ldots, y_n(i))^T$ ja

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Tällöin alkuperäiset systeemit ovat muotoa

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x, \qquad y(i+1) = \mathbf{A}y(i). \tag{$\star$}$$

Esimerkki: Skalaaridifferentiaaliyhtälö $\frac{dx}{dt} = ax$ on helposti ratkaistavissa separoimalla:

$$\int \frac{dx}{x} = \int adt \;\Rightarrow\; \ln x = at + c \;\Rightarrow\; x(t) = Ce^{at}.$$

Miten tehdä jotain esimerkin mukaista matriisiyhtälöille ($\star$)?

Tällaista ratkaisua varten kurssilla kehitellään vaadittavat **matriisi- ja integraalimuunnostekniikat**, sekä käytetään niitä erityyppisten systeemien kvalitatiivisten ominaisuuksien selvittämiseen.