Monissa käytännön ongelmissa ei matriisiyhtälölle $Ax = b$ saada ratkaisua, mutta approksimaatio on silti käyttökelpoinen.

**Määritelmä**

*Jos $A$ on $m \times n$ matriisi ja $b \in \mathbf{R}^m$, niin yhtälön $Ax = b$* **paras pienimmän neliösumman (pns) ratkaisu** *on $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ siten, että*

$$\|b - A\hat{x}\| \leq \|b - Ax\|, \ \forall x \in \mathbf{R}^n$$

Ratkaisu tähän lähtee huomiosta, että $Ax$ on aina vektori $A$:n sarakevektoreiden virittämässä aliavaruudessa. Näistä vektoreista pitää siis valita optimaalinen $A\hat{x}$ eli se, joka on lähinnä $b$:ta. Tälläisellä vektorilla täytyy olla se ominaisuus, että vektorin $b - A\hat{x}$:n on oltava kohtisuorassa sarakeavaruutta vastaan. Niinpä on vaadittava, että $A^T(b - A\hat{x}) = 0$, josta saadaan

# Pienimmän neliösumman ratkaisu 2

## Lause

*Yhtälön* $Ax = b$ *pns ratkaisu* $\hat{x}$ *on täsmälleen normaaliyhtälön* $A^T A\hat{x} = A^T b$ *ratkaisu.*

# Pienimmän neliösumman ratkaisu 2

## Lause

*Yhtälön $Ax = b$ pns ratkaisu $\hat{x}$ on täsmälleen normaaliyhtälön $A^TA\hat{x} = A^Tb$ ratkaisu.*

**Esimerkki:** Yhtälön $Ax = b$, jossa

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

pns ratkaisua $\hat{x}$ varten lasketaan

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \end{pmatrix}, \; A^TA = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ josta } \left(A^TA\right)^{-1} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}.$$

Näillä ratkaistaan $A^TA\hat{x} = A^Tb$ ja saadaan

$$\hat{x} = \left(A^TA\right)^{-1}A^Tb = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

## Lause

*Pns ratkaisu $\hat{x}$ on yksikäsitteinen joss $A^TA$ on kääntyvä.*

# Symmetristen matriisien ominaisuuksia 1 (Kr. 8.3, Lay 7.1)

## Lause

*Symmetrisen matriisin $\left(A^T = A\right)$ eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat kohtisuorassa.*

**Tod.**: Olkoon $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ja $v_i$, $i = 1, 2$ vastaavat ominaisvektorit. Silloin pätee $\lambda_1 v_1 \cdot v_2 = (\lambda_1 v_1)^T v_2 = (Av_1)^T v_2 = (v_1^T A^T) v_2 = v_1^T (Av_2) = v_1^T (\lambda_2 v_2) = \lambda_2 v_1 \cdot v_2$ eli $(\lambda_1 - \lambda_2) v_1 \cdot v_2 = 0$, josta seuraa kohtisuoruus. QED

Jos ortonormaaleja ominaisvektoreita on riittävästi, voidaan niistä muodostaa (sarakkeina) diagonalisointiin $A = PDP^{-1}$ tarvittava kannanmuuttomatriisi $P$. Tällön sanotaan, että matriisi $A$ on **ortogonaalisesti diagonalisoituva** ja pätee siis $A = PDP^T$. Jos näin on, pätee $A^T = (PDP^T)^T = P^{TT} D^T P^T = PDP^T = A$ eli A on symmetrinen! Itse asiassa käänteinenkin pätee:

## Lause

*Neliömatriisi on ortogonaalisesti diagonalisoituva joss se on symmetrinen.*

# Symmetristen matriisien ominaisuuksia 2

**Esimerkki:** Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

karakteristinen yhtälö on $-(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$ eli "Ortogonaalisuuslause" edellä ei välittömästi anna ortogonaalista matriisia $P$. Arvoa $\lambda = -2$ vastaava ominaisvektori $v_3 = \left(-1, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$ on kohtisuorassa molempia $\lambda = 7$ vastaavia ominaisvektoreita $v_1 = (1, 0, 1)^T$ ja $v_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)^T$ vastaan. Mutta jälkimmäiset eivät ole keskenään kohtisuorassa. Korjataan tämä Gram-Schmidtillä:

$$z_2 = v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Nyt $\{v_1, z_2, v_3\}$ on $\mathbf{R}^3$:n ortogonaalikanta. Normalisoimalla kukin vektoreista ja muodostamalla niistä ortogonaalisen muunnosmatriisin $P$ sarakkeet saadaan

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

joille siis pätee $A = PDP^T$.

# Spektraalihajotelma 1 (Lay 7.1)

Jos pätee $A = PDP^T$, jossa ortogonaalisen $P$:n sarakkeina ovat $A$:n normeeratut ominaisvektorit $\{u_i\}$ ja $D$:n diagonaalina ominaisarvot $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ (eli $A$:n **spektri**), saadaan

$$
\begin{aligned}
A = PDP^T &= (u_1|\cdots|u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} \\
&= (\lambda_1 u_1|\cdots|\lambda_n u_n) \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} = \lambda_1 u_1 u_1^T + \cdots + \lambda_n u_n u_n^T .
\end{aligned}
$$

Tämä on $A$:n **spektraalihajotelma**. $n \times n$ matriisit $u_i u_i^T$ ovat rangia 1 olevia **projektiomatriiseja**: $(u_i u_i^T)x$ on vektorin $x$ ortogonaaliprojektio vektorin $u_i$ virittämälle 1-ulotteiselle aliavaruudelle. Jos osa ominaisarvoista on hyvin pieniä, kertoo spektraalihajotelma pelkistetysti, mitkä projektiot kuvaavat $A$:n.

# Spektraalihajotelma 2 (Lay 7.1)

**Esimerkki:** Symmetrisen matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 3$ ja $\lambda_3 = 2$. Vastaavat ominaisvektorit ovat $(2, 1, 1)^T$, $(-1, 1, 1)^T$ ja $(0, -1, 1)^T$. Normalisoimalla nämä saadaan

$$u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, \quad u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T \text{ ja } \quad u_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T .$$

$A$:n spektraalihajotelma on siten $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i u_i^T$. Koska $u_i$ on $A^k$:n ominaisarvoon $\lambda_i^k$ liittyvä ominaisvektori, nähdään, että $A^k = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^k u_i u_i^T$ kaikille $k = 1, 2, \ldots$

Huomaa, että $\lambda = -6$ on dominoiva ominaisarvo, koska $6 > |\lambda_i|$, $i = 2, 3$. Siten

$$\frac{A^k}{(-6)^k} \longrightarrow u_1 u_1^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} .$$

eli projektiomatriisi $u_1 u_1^T$ kuvaa asymptoottisesti $A^k$:n geometrian “venytystä vaille”.

# Spektraalihajotelma 3 (Lay 7.1)

Entä jos dominoiva ominaisarvo on monikertainen, kuten edeltävän esimerkin matriisilla

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

jossa $\lambda = 7$ oli kaksinkertainen ja $-2$ yksinkertainen? Tämäkin tilanne ratkeaa heti spektraaliesityksestä ja voidaan laskea, että

$$\frac{B^k}{7^k} \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)^T \left(-\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix},$$

joka ei ole projektiomatriisi, vaikka onkin kahden sellaisen summa.

# Spektraalilause (Lay 7.1)

Symmetrisillä matriiseilla on paljon hyviä ominaisuuksia, joista useat voidaan tiivistää seuraavasti

**Lause**

*Symmetrisellä $n \times n$-matriisilla $A$*

- *on $n$ reaalista ominaisarvoa,*
- *$k$-kertaista ominaisarvoa vastaava ominaisavaruus on $k$-ulotteinen,*
- *erillisiä ominaisarvoja vastaavat ominaisaliavaruudet ovat kohtisuorassa,*
- *on ortogonaalinen diagonalisointi.*

(Osa näistä ominaisuuksista on johdettu edellä, osa taas vaatii huomattavasti lisätyötä/löytyy kirjallisuudesta.)

# Neliömuodot 1 (Kr. 8.4, Lay 7.2)

## Määritelmä

*Neliömuoto $Q_A(x)$ on kuvaus $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, joka määrittyy $n \times n$ matriisista $A$: $Q_A(x) = x^T Ax$.*

Koska $A$ ja $\frac{1}{2}(A + A^T)$ määrittelevät saman neliömuodon, voidaan keskittyä symmetristen matriisien antamien neliömuotojen analyysiin. Kun $A$ on selvä, merkitään yksinkertaisesti $Q(x)$. $n \times n$ matriisin neliömuoto on aina toisen asteen polynomi $n$:n muuttujan suhteen.

# Neliömuodot 1 (Kr. 8.4, Lay 7.2)

## Määritelmä

*Neliömuoto* $Q_A(x)$ *on kuvaus* $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, *joka määrittyy* $n \times n$ *matriisista* $A$*:* $Q_A(x) = x^T Ax$.

Koska $A$ ja $\frac{1}{2}(A + A^T)$ määrittelevät saman neliömuodon, voidaan keskittyä symmetristen matriisien antamien neliömuotojen analyysiin. Kun $A$ on selvä, merkitään yksinkertaisesti $Q(x)$. $n \times n$ matriisin neliömuoto on aina toisen asteen polynomi $n$:n muuttujan suhteen.

**Esimerkki:** Matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

määrittää neliömuodon

$$Q_A(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2.$$

# Neliömuodot 2

Kääntyvä $n \times n$ matriisi $P$ voidaan tulkita koordinaatiston muunnosmatriisiksi $\mathbf{R}^n$:lla: $x = Py$. Jos siirrytään alkuperäisistä $x$-koordinaateista $y$-koordinaatteihin, muuntuu neliömuodon esitys

$$Q(x) = x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T(P^T AP)y \tag{1}$$

eli uudessa kannassa matriisi on $P^T AP$. Koska kuitenkin $A$ voidaan aina olettaa symmetriseksi ja symmetriset matriisit ovat ortogonaalisesti diagonalisoituvia, on nyt tarjolla ortogonaalinen koordinaatistonmuunnos. Sitä vastaten $Q$ saa yksinkertaisimman mahdollisen esityksen, **pääakselimuodon**:

$$Q(y) = y^T Dy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2. \tag{2}$$

Geometrisesti (1) ja (2) ovat tietenkin täsmälleen samoja kuvauksia $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, esitettynä vain eri koordinaateissa!

# Neliömuodot 3

Neliömuodon geometria on hahmottuu pääakselimuodosta helposti. Yksinkertaisimmillaan, tasossa, yhtälö $x^T Ax = vakio$ määrittää joko ellipsin, hyperbelin, suoraparin, pisteen tai on tyhjä joukko. Käyrän orientaatio selviää välittömästi (kohtisuorista) ominaisvektoreista, jotka antavat akselien suunnat.

**Esimerkki:**

$$Q(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 48 \iff (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 48.$$

Matriisin ominaisavot ovat 3 ja 7, joita vastaavat ortonormaalit ominaisvektori ovat $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ ja $u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. Siten koordinaatiston muunnos on $x = Py$, jossa

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ja vastaava pääakselimuoto $y^T Dy = 3y_1^2 + 7y_2^2$. $Q = 48$ vastaa ellipsiä, jonka akselit ovat 45 asteen kulmassa alkuperäisten $\mathbf{R}^2$:n koordinaattiakselien suhteen.

# Neliömuodot 4

## Määritelmä

*Neliömuoto $Q$ on*

- **positiividefiniitti** *jos* $Q(x) > 0, \forall x \neq 0$,
- **positiivisemidefiniitti** *jos* $Q(x) \geq 0, \forall x$ *ja on olemassa* $x \neq 0$ *siten että* $Q(x) = 0$,
- **negatiividefiniitti** *jos* $Q(x) < 0, \forall x \neq 0$,
- **negatiivisemidefiniitti** *jos* $Q(x) \leq 0, \forall x$ *ja on olemassa* $x \neq 0$ *siten että* $Q(x) = 0$,
- **indefiniitti** *jos $Q$ saa sekä pos. että neg. arvoja.*

# Neliömuodot 5

**Lause**

*Neliömuoto* $x^T Ax$, *A symmetrinen, on*

- *positiividefiniitti joss A:n ominaisarvot ovat positiiviset,*
- *positiivisemidefiniitti joss A:n ominaisarvot ovat ei-negatiiviset ja on olemassa häviävä ominaisarvo,*
- *negatiividefiniitti joss A:n ominaisarvot ovat negatiiviset,*
- *negatiivisemidefiniitti joss A:n ominaisarvot ovat ei-positiiviset ja on olemassa häviävä ominaisarvo,*
- *indefiniitti joss A:lla on sekä pos. että neg. ominaisarvoja.*

# Neliömuodot 6

**Esimerkki:** Muoto $Q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ "näyttää" positiiviselta, mutta ei ole sitä. Vastaavan symmetrisen matriisin

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

spektri on $\{5, 2, -1\}$. $Q$ on siis indefiniitti neliömuoto (joka siis saa myös negatiivisia arvoja). Geometrisesti tasa-arvopinnat $Q =$ vakio ovat yksi- tai kaksivaippaisia elliptisiä hyperboloideja $\mathbf{R}^3$:ssa.

# Singulaariarvot 1 (Lay 7.4)

Vaikkei diagonalisointi $A = PDP^{-1}$ olekaan mahdollinen mielivaltaiselle $m \times n$ matriisille $A$, osoittautuu, että hieman yleisempi hajotelma $A = QDP^{-1}$ onnistuu. Ensin kuitenkin hiukan neliömuotojen ääriarvoista.

$A^T A$ on symmetrinen $n \times n$ matriisi, joten se on ortogonaalisesti diagonalisoituva. Olkoot $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ sen ominaisarvot ja $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormaalit ominaisvektorit. Siten

$$0 \le \|Av_i\|^2 = (Av_i)^T Av_i = v_i^T A^T Av_i = v_i^T \mu_i v_i = \mu_i. \tag{1}$$

Olkoot nämä arvot laskevassa järjestyksessä $\mu_i \ge \mu_{i+1}$. Niiden juuret $\sigma_i = \sqrt{\mu_i}$ ovat $A$:n **singulaariarvot**. Singulaariarvot antavat (1) nojalla vektoreiden $Av_i$ pituudet.

Huomaa, että $\|Ax\|^2$ maksimoituu samalla $x$:lla kuin $\|Ax\|$.

# Singulaariarvot 2 (Lay 7.4)

## Lause

*Symmetriselle $B$, jonka spektri on $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$, $\mu_1 = \max\{x^T B x \mid \|x\| = 1\}$ ja maksimi saavutetaan $\mu_1$:tä vastaavalla yksikköominaisvektorilla.*

**Esimerkki:** Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{joten} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix},$$

jonka ominaisarvot ovat $\{360, 90, 0\}$, josta edelleen $A$:n singulaariarvot: $\{6\sqrt{10}, 3\sqrt{10}, 0\}$. $A^T A$:n yksikköominaisvektorit ovat

$$v_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T, \; v_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T \text{ ja } v_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T.$$

$\|Ax\|$ maksimoituu edellä olevan nojalla $v_1$:n suuntaan ja sen maksimiarvo yksikköpallolla on siis $\|Av_1\| = \sigma_1 = 6\sqrt{10}$.

Voidaan osoittaa, että $\|Ax\|$:n maksimi $v_1$:n ortogonaalikomplementissa saavutetaan $v_2$:n suuntaan ja on suuruudeltaan $\sigma_2$. (Tämä yleistyy edelleen, katso Lay 7.3 Lause 7 ja 7.4 Lause 9.)

Myös $AA^T$ on symmetrinen $(m \times m)$ matriisi, joten se on ortogonaalisesti diagonalisoituva. Olkoot $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ sen ominaisarvot ja $\{u_1, \ldots, u_m\}$ ortonormaalit ominaisvektorit. Siten $0 \leq \|A^T u_i\|^2 = (A^T u_i)^T A^T u_i = u_i^T AA^T u_i = u_i^T \lambda_i u_i = \lambda_i$. (2)
Olkoot nämä arvot laskevassa järjestyksessä $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$. Koska $A^T A v_i = \mu_i v_i$, saadaan kertomalla vasemmalta $A$:lla

$$AA^T(Av_i) = \mu_i(Av_i),$$

joten nähdään, että $\mu_i$ ja $Av_i$ ovat $AA^T$:n ominaisarvo ja -vektoripari. Siten $AA^T$:n ja $A^T A$:n nollasta eroavat ominaisarvot ovat samat. Jos $r$ on $A$:n rangi, niin

$$\mu_i = \begin{cases} \sigma_i^2 & , \ i = 1, \ldots, r \\ 0 & , \ i = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

josta edelleen

$$Av_i = \begin{cases} \sigma_i u_i & , \ i = 1, \ldots, r \\ 0 & , \ i = r+1, \ldots, m \end{cases}$$

# Singulaariarvot 4

$\{u_i\}_1^m$ ovat $A$:n **vasemmat singulaarivektorit** ja $\{v_i\}_1^n$ **oikeat singulaarivektorit**. Edellisen nojalla niille voidaan siis kirjoittaa

$$A\left(v_1 \cdots v_r \middle| v_{r+1} \cdots v_n\right) = \left(u_1 \cdots u_r \middle| u_{r+1} \cdots u_m\right)\Sigma\ ,$$

jossa

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

on $m \times n$ matriisi, jonka ainoat nollasta eroavat alkiot ovat singulaariarvot $r \times r$ diagonaalimatriisissa $D$, $r \leq \min\{n, m\}$.

# Singulaariarvohajotelma 1 (Lay 7.4)

Edellä oleva kehittely on oleellisesti kaikki mitä tarvitaan todistamaan **singulaariarvohajotelma** (engl. singular value decomposition, SVD).

**Lause**

*Olkoon $A$ $m \times n$ matriisi, jonka rangi on $r$. Silloin on olemassa $\Sigma$ kuten edellä ja siinä matriisi $D$, jonka diagonaalina ovat $A$:n singulaariarvot. Samoin on olemassa $m \times m$ $U$ ja $n \times n$ $V$, molemmat ortogonaalisia, siten että $A = U\Sigma V^T$.*

**Huomioita:**

**1.** Matriisit $U$ ja $V$ eivät ole yksikäsitteisiä.

**2.** Jos $A$ on $n \times n$ neliömatriisi, ovat $\Sigma$, $U$ ja $V$ samaa kokoa ja kaksi viimeistä ortogonaalimatriiseja. Jos $A$ on vieläpä symmetrinen tiedetään aiemmasta, että se on ortogonaalisesti diagonalisoituva, $A = PDP^T$, joten voidaan siis valita $U = V$.

# Singulaariarvohajotelma 2 (Lay 7.4)

**Esimerkki:** Konstruoidaan singulaarihajoitelma edellisen esimerkin matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyt siis $m = 2,\ n = 3$.

1. Diagonalisoidaan $A^T A$ ja ratkaistaan singulaariarvot $\sigma_i$ kuten edellä: $\{6\sqrt{10}, 3\sqrt{10}, 0\}$ (siis $r = 2$). Ortonormaalit ominaisvektorit $v_i$:

$$v_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T, \ v_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T \quad \text{ja} \quad v_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T.$$

2. Määritellään $3 \times 3$ -matriisi $V = (v_1 | v_2 | v_3)$ ja edelleen

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

# Singulaariarvohajotelma 2 (Lay 7.4)

3. $U$:n $r$ ensimmäistä saraketta ovat $Av_1, \ldots, Av_r$ normalisoituna. Nyt $r = 2$ ja

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1 = \frac{1}{6\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} Av_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix},$$

jotka ovat $\mathbf{R}^2$:n kanta ja siten $U = (u_1|u_2)$. Siten $A$:n singulaariarvohajotelma on

$$U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

NB. Jos kävisi niin, että $\{Av_i\}$ ei antaisi kantaa kuten yllä, vaan vain $k < m$ vektoria, niin silloin etsitään ortogonaalikannan loput vektorit tämän joukon ortogonaalikomplementista Gram-Schmidtia ja normalisointia käyttäen.