

Seuraavaksi tarkastellaan **ensimmäisen kertaluvun lineaarista, vakiokertoimista differentiaaliyhtälösystemiä**

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

alkuarvoilla $x_i(0) = a_i$, $i = 1, \dots, n$.

Mikäli **ohjaustermit** häviävät eli $b_i(t) \equiv 0$ jokaiselle i , on systeemi **homogeeninen**, jos taas ei-triviaaleja ohjaustermejä on mukana, on systeemi **epähomogeeninen**.

Matriisimuodossa homogeeninen yhtälö on

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = a,$$

jossa

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Epähomogeeninen yhtälö saa muodon

$$x'(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(0) = a,$$

jossa siis b on (mahdollisesti t -riippuva) n -ulotteinen pystyvektori.

Myös merkintää $\dot{x}$ käytetään t -derivaatalle (fluxio).

Samoin kuin vektorin derivaatta on komponentittainen derivaatta, on matriisin derivaatta alkioittainen derivaatta.

Lemma

Neliömatriisille A pätee: $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A \quad \forall t \in \mathbf{R}$.

Tod. Erotusosamäärään palauttaen saadaan

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{tA} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} \\ &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} = e^{tA}A,\end{aligned}$$

jossa on käytetty matriisieksponentin aina suppenevaa sarjakehitelmää $e^{hA} = I + hA + \frac{h^2A^2}{2!} + \frac{h^3A^3}{3!} + \dots$

QED

Lause

Alkuarvoprobeleman $x' = Ax$, $x(0) = a$ yksikäsitteinen ratkaisu on

$$x(t) = e^{tA}a. \quad (\star)$$

Tod. Lemman nojalla $\frac{d}{dt}(e^{tA}a) = Ae^{tA}a$ ja koska $e^{0A}a = a$, niin $(\star)$ on homogeenisen yhtälön ratkaisu.

Olkoon $\tilde{x}(t)$ toinen ratkaisu. Määritellään $y(t) = e^{-tA}\tilde{x}$. Silloin

$$y' = -Ae^{-tA}\tilde{x} + e^{-tA}A\tilde{x} \equiv 0,$$

joten y on vakio. Koska $y(0) = \tilde{x}(0) = a$, niin $\tilde{x} = e^{tA}a$. QED

MatriisiekspONENTTIRatkaisu on lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisutavoista lyhin ja selkein. Se kuitenkin edellyttää matriisiekspONENTIN tuntemusta. Muitakin ratkaisumenetelmiä on, katso Kreyszig jne.

Epähomogeeninen dys 1

Myös epähomogeeninen systeemi $x' = Ax + b$, $x(0) = a$ saadaan ratkaistua matriisieksponentilla. Menetelmä on kuten "vakion variointi" skalaariteoriassa: etsitään ratkaisua muodossa $x(t) = e^{tA}f(t)$, f tuntematon funktio.

Tällä yritteellä $x' = Ae^{tA}f(t) + e^{tA}f' = Ax + e^{tA}f' = Ax + b$.
Siten $f'(t) = e^{-tA}b(t)$, josta $f(t) = \int_0^t e^{-sA}b(s)ds + a$ ja ratkaisuksi saadaan $x(t) = e^{tA}a + e^{tA} \int_0^t e^{-sA}b(s)ds$. (1)
(Tämän voi myös arvata ja derivoimalla todeta alkuperäisen tehtävän ratkaisuksi.)

Lauseke (1) on myös ainoa ratkaisu, sillä jos y on toinen ratkaisu, niin $x' - y' = A(x - y)$, jolla on homogeenisena yhtälönä yksikäsitteinen ratkaisu $e^{tA}k$. Siispä y on muotoa (1) jollekin vakiolle. Mutta vakio on alkuehdon määräämä, joten $y \equiv x$.

Lause

Epähomogeenisen alkuarvoprobleeman $x' = Ax + b$, $x(0) = a$ yksikäsitteinen ratkaisu on

$$x(t) = e^{tA}a + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds = e^{tA}a + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds. \quad (\star)$$

Viimeinen muoto $(\star)$ on merkillepantava; se on ohjausfunktion $b(t)$ ja matriisiekspONENTIN e^{tA} **konvoluutiotulo**.

Esimerkki 1: Tarkastellaan epähomogeenista systeemiä, jossa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Aiemmin on laskettu matriisiekspONENTTI (ilman $-s$ tekijää)

$$e^{-sA} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}, \quad \text{josta}$$

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} s \sin s \\ s \cos s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \sin t - t \cos t \\ \cos t + t \sin t - 1 \end{pmatrix}.$$

Epähomogeeninen dys 3

Koska

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad (*)$$

niin alkuehdolla $a = (a_1, a_2)^T$ lopulta

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA} \left\{ \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\} = \dots \\ &= \begin{pmatrix} -t + a_1 \cos t + (1 - a_2) \sin t \\ 1 - (1 - a_2) \cos t + a_1 \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tarkistus: $x(0) = \begin{pmatrix} -0 + a_1 \cos 0 + (1 - a_2) \sin 0 \\ 1 - (1 - a_2) \cos 0 + a_1 \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a$, täsmää!

Vastaavan homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisu saadaan sivutuotteena:

$$e^{tA} a = \begin{pmatrix} a_1 \cos t - a_2 \sin t \\ a_1 \sin t + a_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Mitä merkitsee homogeenisen ratkaisun kannalta se, että (*) näyttää olevan aiemmin nähty kiertomatriisi $K(t)$?

Differentiaaliyhtälösystemin määrittelemiä pisteitä, joille $x' = 0$, kutsutaan **kriittisiksi pisteiksi**. Lineaaristen, vakiokertoimisten, homogeenisten systeemien ainoa kriittinen piste on origo. Tutkitaan seuraavaksi yksinkertaisimman tällaisen systeemin ratkaisujen käyttäytymistä **faasitasossa** kriittisen pisteen ympäristössä.

Määritelmä

Olko A reaallinen 2×2 matriisi spektrillä $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Systeemin $x' = Ax$, kriittinen piste, origo, on

- 1 satulapiste**, jos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ja $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,
- 2 nielu**, jos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ja $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$,
- 3 lähde**, jos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ja $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$,
- 4 spiraalinielu (spiraalilähde)**, jos $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, $b \neq 0$ ja $a < 0$ ($a > 0$). Jos $a = 0$ on origo **keskus**.

Huomioita: Puretaan Määritelmän tapaukset.

1. A diagonalisoituu eli $A = TDT^{-1}$. Siten muunnoksella $x = Ty$ voidaan siirtyä y -koordinaatteihin, joissa yhtälö on muotoa $y' = T^{-1}ATy = Dy$. Tämä vastaa kahta riippumatonta differentiaaliyhtälöä! Niiden analyysi on siis skalaariteoriaa ja välittömästi ratkaisu $y = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})^T$ (*), josta ominaisarvojen merkkien mukaan $t \rightarrow \infty \Rightarrow y_1 \rightarrow 0$ ja $y_2 \rightarrow \infty$, ja $t \rightarrow -\infty \Rightarrow y_1 \rightarrow \infty$ ja $y_2 \rightarrow 0$. Tällainen **satulapiste** on **kaoottisen dynamiikan** arkkityyppi; systeemi on yhteen ominaisuuntaan kontraktio ja toiseen ekspansio. Tästä seuraa äärimmäinen herkkyys alkudatalle.

2. Jos A diagonalisoituu, niin ratkaisukaava on kuten (*) yllä. Jos $t \rightarrow \infty$, lähestyvät kaikki ratkaisut asymptoottisesti origoa, siitä termi **nielu**. Toisinaan erotellaan vielä alatyypit **polttopiste**, jos $\lambda_1 = \lambda_2$ ja **solmu**, jos ominaisarvot ovat erilliset.

Jos A ei diagonalisoidu, niin voidaan osoittaa, että välttämättä $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ja $A \sim B$, $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $b \neq 0$. Edeltävän nojalla $e^{tB} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, joten

$$y = e^{tB} a = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 bt \\ a_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + te^{\lambda t} \begin{pmatrix} a_2 b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tämä tapaus on **degeneroitunut nielu**, jossa mielenkiintoista on viimeisen termin lisäkontribuutio dynamiikkaan.

3. Lähde alatapauksineen on analoginen nielun kanssa ja analysoidaan täsmälleen samoin kuin kohta 2. Nyt ratkaisut etääntyvät origosta kun t kasvaa. Voidaankin ajatella, että kohdat 2. ja 3. saadaan toisistaan kääntämällä ajan suunta: $t \rightarrow -t$ kaavoissa.

4. Kun realisella matriisilla on kompleksinen ominaisarvo, on myös tämän liittoluku aina ominaisarvo. Nyt $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ ja 2×2 systeemi voidaan kannanvaihdoilla saattaa muotoon

$$y' = By = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

josta edelleen

$$e^{tB} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

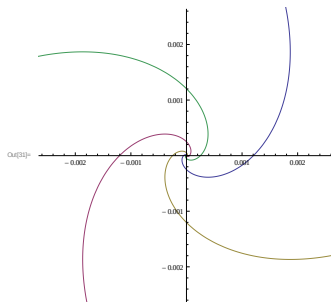
Matriisi yllä on selvästi ortogonaalinen matriisi, kierto, joka ei siis muuta kertomiensa vektorien pituutta. Siten tekijä e^{at} yksin määrää, kulkeeko systeemin ratkaisu kohti origoa ($a < 0$) vai etääntyykö se origosta ($a > 0$). Tämä yhdistettynä kiertoon, joka on mukana täsmälleen silloin kun $b \neq 0$, johtaa siis **spiraalidynamiikkaan**. Näiden rajalla saadaan **keskustapaus**, $a = 0$, joka on siis pelkkä kierto origon ympäri.

Dys kvalitatiivisesti 4

Esimerkki 1: Olkoon $y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} y$. Kerroinmatriisin spektri on $-1 \pm i$, joten matriisieksponentin avulla saadaan spiraalineluratkaisu

$$y = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Alla ratkaisukäyrät origon ympäristössä neljästä eri alkupisteestä. Huomaa kiertosuunta! Se on nyt myötäpäivään, koska $b < 0$.



Systeemi on ratkaistu Kreyszigissä vaihtoehtoisella menetelmällä.

Esimerkki 2: Olkoon

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y.$$

Keroinmatriisin ainoa ominaisarvo on 3, joten kyseessä on jonkinlainen lähde. Matriisille löytyy vain yksi ominaisvektori, joten diagonalisoiminen ei onnistu. Se on kuitenkin similaari Jordan matriisin kanssa: $A = TJT^{-1}$, jossa

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

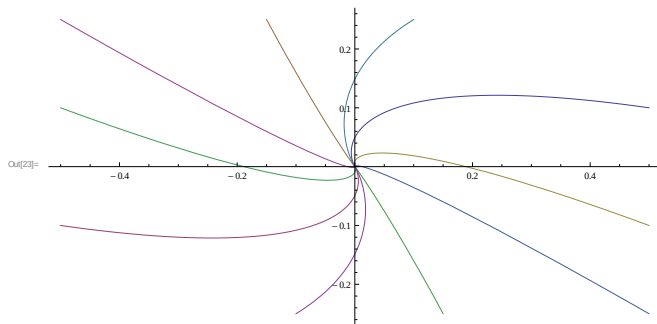
Systeemin $z' = Jz$ (koordinaatistonmuunnos on siis $y = Tz$) ratkaisu on $z(t) = e^{tJ}a$. Matriisieksponentiksi saadaan "nilpotenttimenetelmällä"

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{\begin{pmatrix} 3t & t \\ 0 & 3t \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 3t+t & 0 \\ 0 & 3t+t \end{pmatrix}} \\ &= e^{3t} \left(I + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{joten} \\ e^{tA} &= Te^{tJ}T^{-1} = \dots = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tämä tapaus on esimerkki degeneroituneesta lähteestä.

Dys kvalitatiivisesti 6

Alkuperäisen systeemin (siis y -koordinaateissa) kahdeksan ratkaisukäyrää:



Kuvan "epäsymmetrialla" on syynsä: ominisarvoa 3 vastaava ominaisvektori on $(1, -1)^T$, jonka suuntaisiksi kaikkien ratkaisujen on taivuttava origon läheisyydessä. Ymmärrätkö miksi?

Tämäkin on ratkaistu Kreyszigissä, (sekavalla) vaihtoehtoisella menetelmällä.

Esimerkki, 3d.: Tarkastellaan homogeenista systeemiä $x' = Ax$, jossa

$$A = \begin{pmatrix} -14 & -160 & -40 \\ 181 & 5 & 2 \\ 96 & 84 & 18 \end{pmatrix}.$$

Tämä voidaan saattaa ominaiskannan avulla huomattavasti helpommin ymmärrettävään muotoon. *Mathematicalla:*

```
In[73]:= a = {{-14, -160, -40}, {181, 5, 2}, {96, 84, 18}};
In[74]:= Eigensystem[a]
Out[74]= {{6 + 180 i, 6 - 180 i, -3}, {{-1 + i, 1 + i, 1}, {-1 - i, 1 - i, 1}, {0, -1, 4}}}
In[75]:= e = {{-1 + i, 1 + i, 1}, {-1 - i, 1 - i, 1}, {0, -1, 4}}
Out[75]= {{-1 + i, 1 + i, 1}, {-1 - i, 1 - i, 1}, {0, -1, 4}}
In[76]:= p = Transpose[{Re[e[[1]]], Im[e[[1]]], e[[3]]}]
Out[76]= {{-1, 1, 0}, {1, 1, -1}, {1, 0, 4}}
In[79]:= MatrixForm[Inverse[p].a.p]
Out[79]//MatrixForm=
```

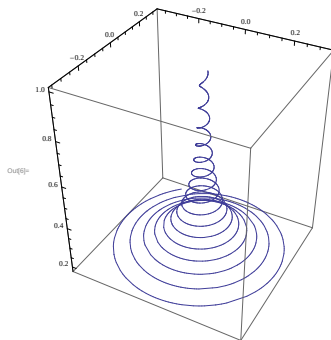
$$\begin{pmatrix} 6 & 180 & 0 \\ -180 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Dys kvalitatiivisesti 8

Siten uusissa koordinaateissa

$$y' = \begin{pmatrix} 6 & 180 & 0 \\ -180 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y ,$$

josta nähdään, että viimeinen komponentti on nyt riippumaton kahdesta ensimmäisestä. Nämä taas käyttäytyvät selvästi 2d spiraalidynamiikan mukaisesti parametreilla $a = 6$ ja $b = -180$. Radat ovat 3d laajenevia spiraaleja, jotka “litistyvät” kahden ensimmäisen komponentin määräämään tasoon kolmannen komponentin lähestyessä eksponentiaalisesti nollaa.





Yleisen n -ulotteisen homogeenisen differentiaaliyhtälösystemin $x' = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ kriittiset pisteet x^* ovat täsmälleen yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisut.

Määritelmä

- Kriittinen piste x^* on **stabiili**, jos jokainen ratkaisu $x(t)$, joka saapuu ($t:n$ kasvaessa) johonkin $x^*:n$ avoimeen ympäristöön, pysyy sellaisessa kaikkina myöhempinä aikoina.
- Jos x^* ei ole stabiili on se **epästabiili** kriittinen piste.
- Jos pätee, että jokainen ratkaisu, joka saapuu $x^*:n$ johonkin avoimeen ympäristöön, itse asiassa lähestyy $x^*:aa$, sanotaan, että tämä kriittinen piste on **asymptoottisesti stabiili**.

Avoimen ympäristön sijaan voidaan usemmiten ajatella avointa, x^* -keskistä kiekkoa. Asymptoottinen stabiilisuus on huomattavasti vahvempi ominaisuus kuin stabiilisuus.

Esimerkki: Lineaarisen vakiokertoimisen systeemin ainoa kriittinen piste on origo.

- Kaikki nielut spiraalilla tai ilman ovat asympotoottisesti stabiileja, kun taas kaikki lähteet ovat epästabiileja.
- Satulapisteet ovat epästabiileja, koska ratkaisu pakenee äärettömyyteen ekspansiivisessa suunnassa.
- Keskusdynamiikka on esimerkki stabiilista dynamiikasta, joka ei ole asympotoottisesti stabiilia.
- Edelläkuvattu 3d esimerkki on epästabiili.

Edellä olevat kvalitatiiviset luokat 2d systeemille $x' = Ax$ saadaan hahmotettua käyttökelpoisella "uudelleenparametrisoinnilla". Kun huomataan, että

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det A ,\end{aligned}$$

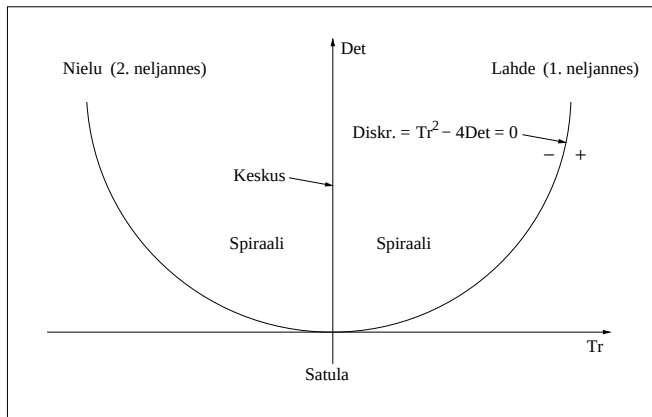
jossa Tr on siis matriisin jälki, niin karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = 0$ ratkaisu on

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{(\text{Tr}(A))^2 - 4 \det A}}{2} .$$

Huomaa, että

$$\det A = \lambda_+ \lambda_- \quad \text{ja} \quad \text{Tr}(A) = \lambda_+ + \lambda_- .$$

Jäljellä ja determinantilla parametrisoituna edeltävät dynamiikan tyypit sijoittuvat seuraavasti:



Stabiileja ovat täsmälleen toisen neljänneksen systeemit.

Epälineaarisen systeemin $x' = f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ **autonomisuus** tarkoittaa sitä, että f ei riipu eksplisiittisesti ajasta. Systeemin analyysissä on apua erään lineaarisen systeemin tuntemuksesta.

Määritelmä

*Tason epälineaarisen systeemin $x' = f(x)$ **linearisointi** kriittisessä pisteessä x^* on systeemi $x' = Ax$, jossa kertoimena on **Jacobin matriisi***

$$A = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right) \bigg|_{x=x^*}.$$

Linearisointi perustuu siihen, että riittävän säännöllinen (vähintään differentioituva) vektorifunktio $f = (f_1, f_2)$ voidaan Taylor-kehittää kriittisessä pisteessä

$$f(x) = f(x^*) + Df(x^*)(x - x^*) + \cdots = Df(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*),$$

jossa Df on Jacobin matriisi ja viimeisin termi on häviävän pieni riittävän lähellä x^* :ää ($g(t) = o(t^k)$ tarkoittaa, että $\frac{g(t)}{t^k} \rightarrow 0$ kun t menee rajalleen). Ax on siis se lineaarisista funktioista, joka muistuttaa eniten kuvausta f pisteen x^* ympäristössä.

Lause

Mikäli systeemin $x' = f(x)$ kriittinen piste x^ on eristynyt, f riittävän säännöllinen, $\det A \neq 0$, A :n ominaisarvot erilliset, eivätkä puhtaasti imaginaariset, on linearisoinnin $x' = Ax$ tyyppi origossa sama kuin alkuperäisen systeemin pisteessä x^* .*

Todistus ei ole aivan yksinkertainen, löytyy kirjallisuudesta.

Epälineaarista dynamiikkaa 1

Esimerkki 1: Epälineaarisella systeemillä voi olla paljon kriittisiä pisteitä. Esimerkiksi kun

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = -x + xy^2 \\ y' = g(x, y) = x^2 - x^2y \end{cases},$$

antavat yhtälöt

$$\begin{cases} -x + xy^2 = -x(1 - y^2) = 0 \\ x^2 - x^2y = x^2(1 - y) = 0 \end{cases}$$

kriittisten pisteiden joukon $\{(x, y) \mid x = 0\} \cup \{(x, y) \mid y = 1\}$.

Differentiaaliyhtälösystemi on ratkaistavissa separoimalla:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - x^2y}{-x + xy^2} = \frac{x^2(1 - y)}{-x(1 - y^2)} = -\frac{x}{1 + y},$$

josta $(1 + y)dy = -xdx$. Integroimalla tämä saadaan

$$y + \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(y + 1)^2 + \frac{1}{2}x^2 = c'$$

eli ratkaisukäyrät ovat $(0, -1)$ -keskisiä ympyröitä.

Esimerkki 2: Lotka-Volterra-malli on klassinen esimerkki epälineaarisesta systeemistä. Se on alunperin populaatiomalli, ns. saalis-saalistaja-malli, mutta sovellutuksia on moneen muuhunkin yhteyteen, jossa muuttujien *yhteenkombinoituminen* on oleellista.

Alkuperäisessä muodossaan y_1 ja y_2 ovat kanien ja kettujen määrät jollakin laajalla, mutta suljetulla alueella (ei populaatioiden nettovirtausta ulos, eikä sisään). Tällöin voidaan keskinäiset riippuvuudet perusmuodossaan kuvata yhtälöin

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2) = ay_1 - by_1y_2 \\ y_2' = f_2(y_1, y_2) = ky_1y_2 - ly_2 \end{cases}$$

jossa a, b, k ja l ovat positiivisia vakioita. Ristitermi y_1y_2 kuvaa kettujen ja kanien kohtaamisten määrää, joissa siis kanikanta kärsii ja kettukanta saa kasvuvoimaa. Oletuksena on, että kaneilla on tarpeeksi kasvikiä, muita petoja ei ole ja ketut syövät vain kaneja.

Systeemin kriittiset pisteet ovat $(0, 0)$ ja $\left(\frac{l}{k}, \frac{a}{b}\right)$. Origon kohdalla linearisointi johtaa matriisiin

$$A_0 = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{array} \right) \bigg|_{y_1=y_2=0} = \left(\begin{array}{cc} a - ky_2 & -by_1 \\ ky_1 & -l \end{array} \right) \bigg|_{y_1=y_2=0} = \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & -l \end{array} \right)$$

Epälineaarista dynamiikkaa 3 (Kreyszig 4.5)

Tämän ominaisarvoille pätee selvästi $\lambda_- = -l < 0 < a = \lambda_+$, joten kyseessä on satulapiste. Aiemmin esitetyn teorian nojalla (Lause Linearisointi 2 -kalvolla) tämä päätelmä pätee myös epälineaarisen systeemin kriittiselle pisteelle.

Onko tulos järkeenkäypä? Systeemi voidaan "häiritä" pois origosta kahdella kvalitatiivisesti hyvin erilaisella tavalla. Jos alkutila $y_1(0)$ on positiivinen, mutta pieni ja $y_2(0) = 0$, on seurauksena on kanien väestöräjhdys, koska harventavaa kettupopulaatiota ei ole. Tämä on faasiavaruuden ekspansiivinen suunta. Jos taas $y_1(0) = 0$ eli kaneja ei ole ja $y_2(0)$ on positiivinen luku, kuolee kettupopulaatio nälkäänsä pois. Tämä on faasiavaruuden kontraktiivinen suunta. Origin läheisyydessä dynamiikka on siis äärimmäisen herkkä pienille populaationvaihteluille.

Toinen kriittinen piste kannattaa ensin siirtää origoon siirtymällä uusiin muuttujiin: $y_1 = u_1 + \frac{l}{k}$, $y_2 = u_2 + \frac{a}{b}$. Systeemi on silloin

$$\begin{cases} u'_1 = \left(u_1 + \frac{l}{k}\right) (-bu_2) \\ u'_2 = \left(u_2 + \frac{a}{b}\right) ku_1 \end{cases}$$

Linearisoimalla tämä nyt origossa saadaan systeemin $u' = A_1 u$ kerroinmatriisiksi

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bl}{k} \\ \frac{ak}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

jonka spektri on $\pm i\sqrt{al}$. Lineaarisella systeemillä on siis keskusdynamiikka, mutta edeltävä teoria (Lause Linearisointi 2 -kalvolla) ei implikoi tätä päätelmää alkuperäiselle systeemille. Tämä on kuitenkin osoitettavissa todeksi systeemin tarkemmalla analyysillä.

Huomaa, että systeemin $u' = A_1 u$ yhtälöt voidaan kertoa ristiin, jolloin saadaan

$$\frac{ak}{b} u_1 u_1' = -\frac{bl}{k} u_2 u_2',$$

josta edelleen integroimalla

$$\frac{ak}{b} u_1^2 + \frac{bl}{k} u_2^2 = \text{vakio}.$$

Nämä käyrät, ellipsit, ovat populaatioiden syklistä vaihtelua kuvaavia jaksollisia ratoja. Kiertosuunta on vastapäivään, miksi?

Tässä esimerkissä populaatioiden dynaaminen tasapaino edellyttää, että pysytään "kauhun tasapainossa" eli keskusdynamiikassa. Jos systeemi poikkeaa siitä, lineaarinen teoria viittaa siihen, että joudutaan joko spiraalinieluun ("kaikkien lajien sukupuutto") tai spiraalilähteeseen ("rajaton kasvu", epärealistinen skenaario maailmassa, jossa on vain äärellinen määrä resursseja).

Epälineaarista dynamiikkaa 5

Esimerkki 3: Tarkastellaan tason epälineaarista systeemiä

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) = x + 4y - x^3 - xy^2 \\ y' = f_2(x, y) = -4x + y - x^2y - y^3. \end{cases}$$

Pienellä päättelyllä voi todeta, että ainoa kriittinen piste on origo. Jacobin matriisi origossa on

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{array} \right) \Big|_{x=y=0} = \left(\begin{array}{cc} 1 - 3x^2 - y^2 & 4 - 2xy \\ -4 - 2xy & 1 - x^2 - 3y^2 \end{array} \right) \Big|_{x=y=0} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{array} \right).$$

Tämän ominaisarvot ovat $1 \pm 4i$, joten kyseessä on spiraalilähde.

Huomaamalla, että $f_1(x, y) = (1 - x^2 - y^2)x + 4y$ ja $f_2(x, y) = -4x + (1 - x^2 - y^2)y$ saattaa alkaa epäillä, että yksikköympyrällä $x^2 + y^2 = 1$ on jotain erityistä merkitystä. Sillä alkuperäinen systeemi yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

jossa kerroinmatriisin spektri on $\pm 4i$. Siten on pääteltävissä, että yksikköympyrä on systeemin **jaksollinen rata**.

Epälineaarista dynamiikkaa 6

Määrittelemällä $z = (x, y)^T$ voidaan helposti analysoida ratkaisun etäisyyttä origosta:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (z^T z) &= z'^T z + z^T z' = 2(x'x + y'y) \\ &= 2((1 - x^2 - y^2)x^2 + 4xy - 4xy + (1 - x^2 - y^2)y^2) \\ &= 2(1 - z^T z) z^T z\end{aligned}$$

eli etäisyyden neliö d toteuttaa yhtälön

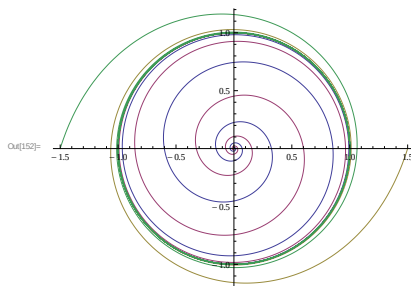
$$d' = 2(1 - d)d .$$

Sen kriittiset pisteet ovat $d = 0$ eli origo ja $d = 1$, joka alkuperäisessä formulaatiossa vastaa x - y -tason yksikköympyrää.

Selvästi jos $0 < d < 1$, on d kasvava ja kun $1 < d$, on d vähenevä. Siten yksikköympyrä on **rajasykli** eli jaksollinen rata, jonka lähelle jokainen muu rata päättyy asymptoottisesti.

Epälineaarista dynamiikkaa 7

Neljä myötäpäivään ($b = -4 < 0$) kiertävää spiraalirataa, jotka lähestyvät rajasykliä:



Systeemi on itse asiassa eksplisiittisesti ratkaistavissa (harjoitus):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\|z_0\|^2 + (1 - \|z_0\|^2)e^{-2t}}} \begin{pmatrix} \cos 4t & \sin 4t \\ -\sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 4: Balthasar van der Polin yhtälö (n. 1927),

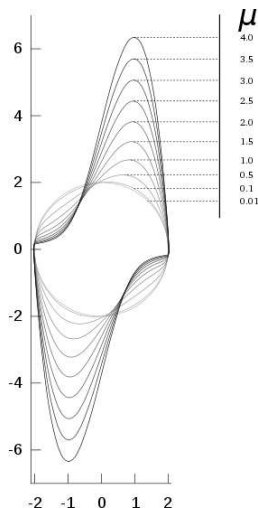
$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0, \quad \mu > 0.$$

Purettuna kahden differentiaaliyhtälön systeemiksi tämä klassikko saa muodon

$$\begin{cases} x' = \mu(1 - y^2)x - y \\ y' = x \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{\mu}y \\ y' = \mu\left(y - \frac{y^3}{3} - x\right) \end{cases}$$

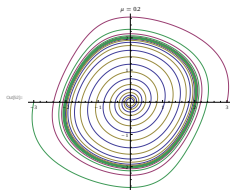
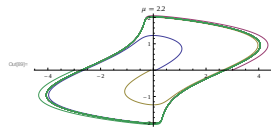
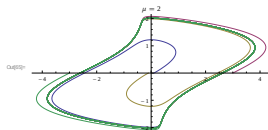
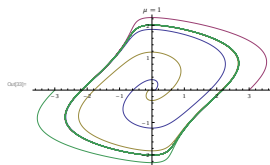
jossa jälkimmäisen johtoon on käytetty Liénardin muunnosta $x = y - \frac{y^3}{3} - \frac{y'}{\mu}$. Linearisointi osoittaa, että nytkin origo on spiraalilähde (harjoitus).

Tällä systeemillä on μ -riippuva rajasykli, oikealla. Huomaa rajatapaus $\mu \downarrow 0$, ympyrä, miksi? Yhtälö liittyy elektronisten (putki)piirien värähtelyihin; analyysiä näistä löytyy Kreyszigistä & erikoisteoksista).



Epälineaarista dynamiikkaa 9

Ensimmäisen 2d-esityksen mukainen van der Pol -systeemi μ :n arvoilla 0.2, 1, 2 ja 2.2. Kaikissa samat alkupisteet $((\pm 0.1, 0)$ ja $(\pm 3, 0))$ ja aikajänne $(0 \rightarrow 50)$. Huomaa dynamiikan kiihtyminen, kun μ kasvaa.



Esimerkki 5: Kuuluisin kaikista...
Edward **Lorenzin** systeemi (1963):

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = x(\rho - z) - y \\ z' = xy - \beta z \end{cases}$$

ilmakehän virtauksille. Kun parametreja varioidaan, ratkaisujen käyttäytyminen vaihtelee rajusti. Lorenzin käyttämällä arvoilla $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ ja $\rho = 28$ saadaan yhtälöistä ulos kaaottisen dynamiikan arkkityyppi. Oikealla sen **outo attraktori**, jolle dynamiikka asymptoottisesti keskittyy (origo keskellä). Tämä on hyvin kauaskantoinen yleistys rajasyklille.

Ratkaise attraktorin ominaisuudet...
(varma Nobeli)

