Tilastolliset menetelmät

Osa 3: Tilastolliset testit

- Tilastollinen testaus

Tilastolliset testit

>> **Tilastollinen testaus**

Tilastolliset hypoteesit

Tilastolliset testit ja testisuureet

Virheet testauksessa

Merkitsevyystaso ja testin hylkäysalue

Testin *p*-arvo

Testin suorittaminen

Tilastollisten hypoteesien testaaminen 1/3

- Tilastollisen tutkimuksen kohteena olevasta perusjoukosta on esitetty jokin *väite* tai *oletus*, jota halutaan *testata*.

- Väitettä tai oletusta voidaan *testata tilastollisesti*, jos väite tai oletus voidaan pukea tutkimuksen kohteena olevan perusjoukon ominaisuuden vaihtelua perusjoukossa kuvaavaa todennäköisyysjakaumaa tai sen parametreja koskevaksi oletukseksi eli *hypoteesiksi*.

Tilastollisten hypoteesien testaaminen 2/3

- Olkoon X tutkimuksen kohteena olevan perusjoukon jonkin ominaisuuden vaihtelua perusjoukossa kuvaava *satunnaismuuttuja*.

- Olkoon satunnaismuuttujan X *todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio*

  $$f(x\ ;\ \theta)$$

  jossa θ on funktion f muodon määräävä *tuntematon* **parametri**.

Tilastollisten hypoteesien testaaminen 3/3

- **Yksinkertaisessa parametrisessa testauksessa** *hypoteesi*

  $$\theta = \theta_0$$

  asetetaan koetteelle havaintojen todennäköisyys-jakaumasta $f(x\,;\,\theta)$ *sisältämää informaatiota vastaan.*

Tilastolliset testit

- Tilastollinen testaus
- >> Tilastolliset hypoteesit
- Tilastolliset testit ja testisuureet
- Virheet testauksessa
- Merkitsevyystaso ja testin hylkäysalue
- Testin *p*-arvo
- Testin suorittaminen

Testausasetelmaa koskevat hypoteesit

- **Testausasetelma** kiinnitetään tekemällä seuraavat kolme oletusta:

(i) *Testausasetelmaa koskevat perusoletukset*, joista pidetään kiinni testauksen aikana, muodostavat testin **yleisen hypoteesin** H.

(ii) *Testattavaa oletusta* kutsutaan **nollahypoteesiksi** ja sitä merkitään H_0:lla.

(iii) **Vaihtoehtoinen hypoteesi** H_1 on *oletus*, *joka astuu voimaan*, *jos nollahypoteesi* H_0 *hylätään testissä*.

Yleinen hypoteesi

- **Yleinen hypoteesi H** sisältää oletukset
  - *perusjoukosta*
  - *käytetystä otantamenetelmästä*
  - *perusjoukon jakaumasta*

- **Yleisen hypoteesin H oletuksista *pidetään kiinni testauksen aikana*, mikä merkitsee sitä, että testi on aina ehdollinen yleisen hypoteesin H oletusten suhteen.**

- **Huomautus**: Yleisen hypoteesin *jakaumaoletusta* voidaan ja on myös syytä testata erikseen; ks. esimerkkiä luvussa **Yhteensopivuuden, homogeenisuuden ja riippumattomuuden testaaminen.**

Tilastolliset hypoteesit
Nollahypoteesi

- Sitä *perusjoukon jakauman parametreja koskevaa väitettä* tai *oletusta*, *jota testataan* kutsutaan **nolla-hypoteesiksi** ja sitä merkitään H_0:lla.

- Testissä nollahypoteesi H_0 *asetetaan koetteelle havaintojen perusjoukon jakaumasta sisältämää informaatiota vastaan*.

- Nollahypoteesista H_0 *pidetään kiinni*, elleivät havaintojen sisältämät *todisteet nollahypoteesia vastaan* ole *kyllin voimakkaita*.

Nollahypoteesin muoto yksinkertaisissa testausasetelmissa

- Olkoon

  $$f(x\,;\,\theta)$$

  tutkimuksen kohteena olevaa perusjoukon ominaisuutta kuvaavan *todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio*.
- *Yksinkertaisissa* (*parametrisissa*) *testausasetelmissa* nollahypoteesi on muotoa

  $$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$$

Vaihtoehtoinen hypoteesi

- **Vaihtoehtoinen hypoteesi** H_1 on *oletus*, *joka astuu voimaan*, *jos nollahypoteesi* H_0 *hylätään*.

- **Huomautuksia:**
  - Tilastollista testiä tehtäessä toivotaan usein, että *nollahypoteesi voidaan hylätä* ja *vaihtoehtoinen hypoteesi hyväksyä*.
  - Vaihtoehtoisen hypoteesin *hyväksyminen* merkitsee yleensä *informaation lisääntymistä*.

Vaihtoehtoisen hypoteesin muoto yksinkertaisissa testausasetelmissa 1/2

- Jos nollahypoteesi on yksinkertaista muotoa

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

vaihtoehtoinen hypoteesi voidaan muotoilla kolmella eri tavalla.

- **Huomautus:**

  Vaihtoehtoisen hypoteesin muoto vaikuttaa tavallisesti siihen tapaan, jolla testi suoritetaan.

Vaihtoehtoisen hypoteesin muoto yksinkertaisissa testausasetelmissa 2/2

- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

  $$H_1 : \theta > \theta_0$$

  tai muotoa

  $$H_1 : \theta < \theta_0$$

  vaihtoehtoista hypoteesia kutsutaan **yksisuuntaiseksi**.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

  $$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

  vaihtoehtoista hypoteesia kutsutaan **kaksisuuntaiseksi**.

Tilastolliset testit

Tilastollinen testaus

Tilastolliset hypoteesit

\>> Tilastolliset testit ja testisuureet

Virheet testauksessa

Merkitsevyystaso ja testin hylkäysalue

Testin *p*-arvo

Testin suorittaminen

Tilastollinen testi päätössääntönä

- **Tilastollinen testi** on *päätössääntö*, joka kertoo *jokaisessa yksittäisessä testaustilanteessa* eli *jokaiselle otokselle*, *onko nollahypoteesi* H_0 *hylättävä vai ei*.

Testisuure

- Tilastollinen testi perustetaan johonkin **testisuureeseen**, joka *mittaa havaintojen ja nollahypoteesin* H_0 *yhteensopivuutta*.
- Testisuure on *satunnaismuuttuja*, jonka arvo riippuu havainnoista ja nollahypoteesista H_0 .
- Havaintojen ja nollahypoteesin H_0 yhteensopivuuden mittaamisella tarkoitetaan sitä, että tutkitaan *kuinka toden-näköistä on saada sellaisia testisuureen arvoja kuin on saatu, nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*.
- Siten yhteensopivuuden mittaaminen vaatii *testisuureen jakauman* tuntemista, *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*.

Testisuureen normaaliarvo

- Testisuureen odotusarvoa *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä* kutsutaan testisuureen **normaaliarvoksi**.

- Jos testisuureen havaittu arvo *on lähellä* testisuureen normaaliarvoa, *havainnot ovat sopusoinnussa nolla-hypoteesin* H_0 *kanssa*.
- Jos testisuureen otoksesta määrätty arvo *poikkeaa merkitsevästi* testisuureen normaaliarvosta, *havainnot sisältävät todisteita nollahypoteesia* H_0 *vastaan*.

Tilastolliset testit

Tilastollinen testaus

Tilastolliset hypoteesit

Tilastolliset testit ja testisuureet

>> Virheet testauksessa

Merkitsevyystaso ja testin hylkäysalue

Testin *p*-arvo

Testin suorittaminen

Hylkäysvirhe ja sen todennäköisyys 1/2

- Jos nollahypoteesi H_0 *hylätään silloin*, *kun se on tosi*, tehdään **hylkäysvirhe**.
- *Hylkäysvirheen todennäköisyys* α on ehdollinen todennäköisyys

$$\Pr(H_0 \text{ hylätään} \mid H_0 \text{ on tosi}) = \alpha$$

- Hylkäysvirheen todennäköisyyden α *komplementti-todennäköisyys*

$$\Pr(H_0 \text{ hyväksytään} \mid H_0 \text{ on tosi}) = 1 - \alpha$$

on todennäköisyys *hyväksyä* nollahypoteesi *silloin*, *kun se on tosi*.

Virheet testauksessa

Hylkäysvirhe ja sen todennäköisyys 2/2

- Tilastollisessa testauksessa noudatetaan tieteen yleistä *varovaisuusperiaatetta*:

  Hypoteeseja ei pidä hylätä ilman riittäviä syitä.

- Siksi nollahypoteesin H_0 *virheellisen hylkäyksen todennäköisyys halutaan tehdä* tilastollisessa testauksessa *mahdollisimman pieneksi*.

Virheet testauksessa
Hyväksymisvirhe ja sen todennäköisyys

- Jos nollahypoteesi H_0 *jätetään voimaan silloin, kun se ei ole tosi*, tehdään **hyväksymisvirhe**.
- *Hyväksymisvirheen todennäköisyys* β on ehdollinen todennäköisyys

$$\Pr(\mathrm{H}_0 \text{ jätetään voimaan} \mid \mathrm{H}_0 \text{ ei ole tosi}) = \beta$$

- *Hyväksymisvirheen todennäköisyyden* β *komplementti-todennäköisyyttä*

$$\Pr(\mathrm{H}_0 \text{ hylätään} \mid \mathrm{H}_0 \text{ ei ole tosi}) = 1 - \beta$$

kutsutaan testin **voimakkuudeksi**. Hyvä testi on *voimakas*, koska voimakkaalla testillä on pieni hyväksymisvirheen todennäköisyys β.

Ensimmäisen ja toisen lajin virheet

- Koska testiä tehtäessä pyritään *ensisijaisesti* varomaan sitä, että nollahypoteesi H_0 *hylätään* silloin, kun se *on tosi*, *hylkäysvirhettä* kutsutaan usein **ensimmäisen lajin virheeksi**.

- Tällöin *hyväksymisvirhettä* eli sitä, että nollahypoteesi H_0 *hyväksytään* silloin, kun se *ei ole tosi*, kutsutaan **toisen lajin virheeksi**.

Maailman tila ja testin tulos

- *Maailman tilat* ja *testin tulokset* voidaan luokitella seuraavaksi nelikentäksi:

		Maailman tila	
		Nollahypoteesi *pätee*	Nollahypoteesi *ei päde*
Testin tulos	Nollahypoteesi *jää voimaan*	**Oikea johtopäätös**	*Hyväksymis-virhe*
	Nollahypoteesi *hylätään*	*Hylkäysvirhe*	**Oikea johtopäätös**

Tilastolliset testit

Tilastollinen testaus

Tilastolliset hypoteesit

Tilastolliset testit ja testisuureet

Virheet testauksessa

>> Merkitsevyystaso ja testin hylkäysalue

Testin *p*-arvo

Testin suorittaminen

Testin päätössääntönä ja testin hylkäys- ja hyväksymisalueet

- Kun testi formuloidaan *päätössääntönä*, testiä varten konstruoidun testisuureen *mahdollisten arvojen joukko* on jaettava kahteen osaan, *hylkäysalueeseen* ja *hyväksymis-alueeseen*:

  (i) Jos testisuureen havainnoista määrätty arvo joutuu **hylkäysalueelle**, *nollahypoteesi* H_0 *hylätään*.

  (ii) Jos testisuureen havainnoista määrätty arvo joutuu **hyväksymisalueelle**, *nollahypoteesi* H_0 *jätetään voimaan*.

Merkitsevyystaso

- Testin **merkitsevyystaso** α on todennäköisyys sille, että *testisuureen havainnoista määrätty arvo joutuu hylkäys-alueelle, jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*.

- Testin *hylkäysalue* määrätään käytännössä kiinnittämällä merkitsevyystaso α *etukäteen* (jopa ennen havaintojen keräämistä).

Merkitsevyystason valinta: Tavanomaiset merkitsevyystasot 1/2

- Koska testeissä halutaan ensisijaisesti suojautua *hylkäysvirhettä* vastaan, testin merkitsevyystasoksi α on tapana valita pieniä lukuja.
- Ns. **tavanomaiset merkitsevyystasot** ovat

$$\alpha = 0.05$$

$$\alpha = 0.01$$

$$\alpha = 0.001$$

- Testin merkitsevyystasoa α valittaessa on syytä ottaa huomioon *väärän päätöksen seuraukset*.

Merkitsevyystason valinta: Tavanomaiset merkitsevyystasot 2/2

- Jos nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä merkitsevyystasolla $\alpha = 0.05$, niin sanotaan:

  Testisuureen arvo (tai testin tulos) on **melkein merkitsevä**.

- Jos nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä merkitsevyystasolla $\alpha = 0.01$, niin sanotaan:

  Testisuureen arvo (tai testin tulos) on **merkitsevä**.

- Jos nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä merkitsevyystasolla $\alpha = 0.001$, niin sanotaan:

  Testisuureen arvo (tai testin tulos) on **erittäin merkitsevä**.

Testin hylkäysalueen määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 1/6

- Testin *hylkäysalue* riippuu yksinkertaisissa testausasetelmissa

  – paitsi valitusta merkitsevyystasosta α –

  myös *vaihtoehtoisen hypoteesin muodosta*.
- Olkoon parametria θ koskeva nollahypoteesi yksinkertaista muotoa

  $$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$$
- Valitaan testin *merkitsevyystasoksi* α.

Testin hylkäysalueen määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 2/6

- Oletetaan, että *testisuureena* on (jatkuva) satunnaismuuttuja Z.
- Tehdään testisuureesta Z seuraavat oletukset:

(1) Testisuureen Z mahdolliset arvot kuuluvat väliin (a, b), jossa voi olla $a = -\infty$ ja/tai $b = +\infty$.

(2a) Testisuureella Z on taipumus saada *suuria* arvoja, jos

$$\theta > \theta_0$$

(2b) Testisuureella Z on taipumus saada *pieniä* arvoja, jos

$$\theta < \theta_0$$

- **Huomautus:**

Yo. oletukset pätevät kaikille tämän esityksen testisuureille.

Testin hylkäysalueen määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 3/6

- Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on *yksisuuntainen vaihtoehto*

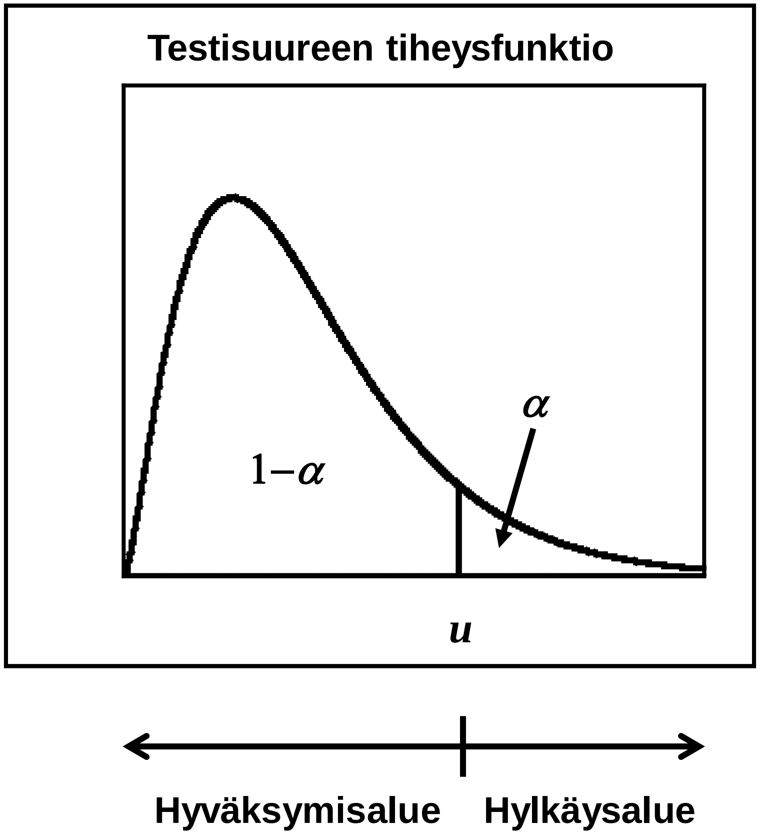
  $$H_1 : \theta > \theta_0$$

  hylkäysalue on muotoa

  $$(u, b)$$

  jossa **kriittinen raja** u määrätään siten, että

  $$\Pr(Z \geq u \mid H_0) = \alpha$$



Testin hylkäysalueen määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 4/6

- Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on *yksi-suuntainen vaihtoehto*

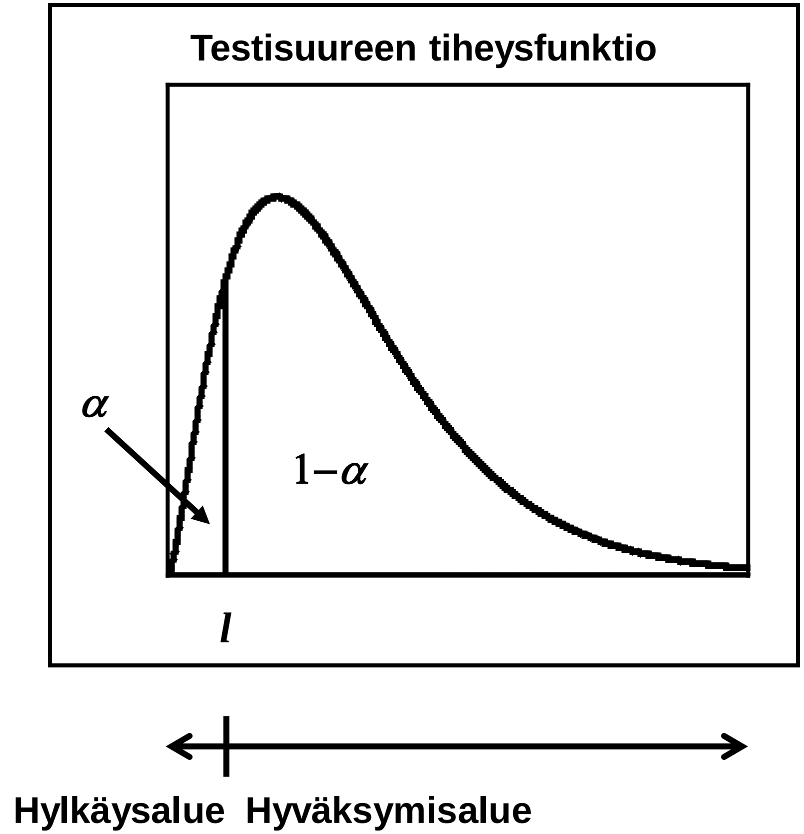
  $$H_1 : \theta < \theta_0$$

  hylkäysalue on muotoa

  $$(a, l)$$

  jossa **kriittinen raja** *l* määrätään siten, että

  $$\Pr(Z \leq l \mid H_0) = \alpha$$



Testin hylkäysalueen määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 5/6

- Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on *kaksi-suuntainen vaihtoehto*

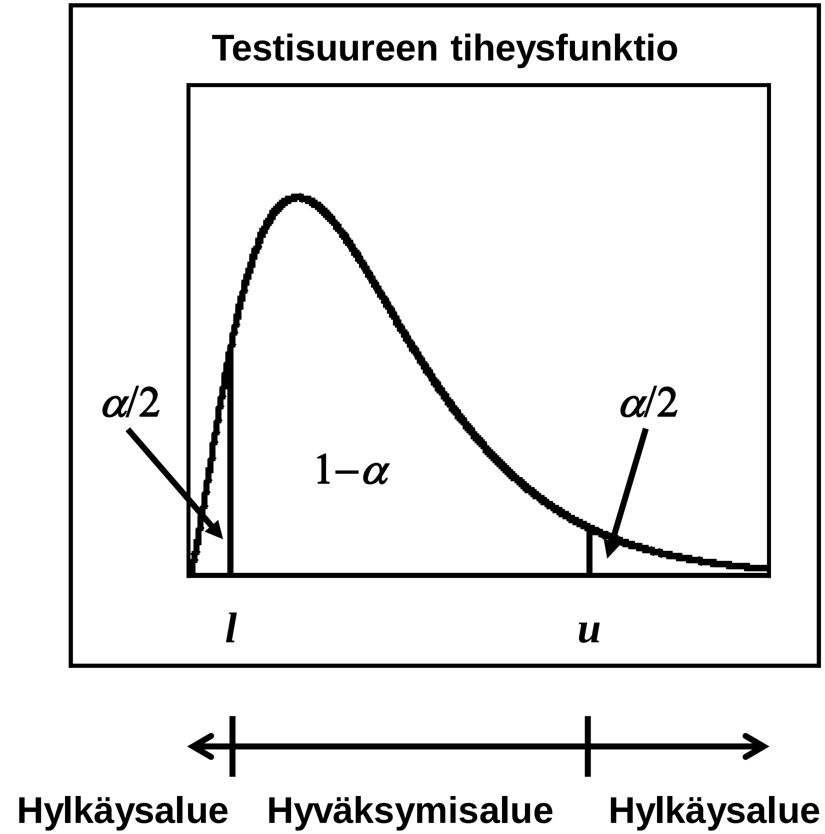
  $$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

  hylkäysalue on muotoa

  $$(a, l) \cup (u, b)$$

  jossa **kriittiset rajat** l ja u määrätään siten, että

  $$\Pr(Z \geq u \mid H_0) = \Pr(Z \leq l \mid H_0) = \alpha/2$$



Testin hylkäysalueen määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 6/6

- Oletetaan, että testisuureen Z jakauma on *symmetrinen* origon suhteen.
- Tällöin kalvoilla 3/6-5/6 esitetyille *kriittisille rajoille* pätee:

$$l = -u$$

- **Huomautus:**

  Kalvojen 3/6-5/6 todennäköisyydet ovat *ehdollisia todennäköisyyksiä*, joissa ehtotapahtumana on se, että *nollahypoteesi* H_0 *pätee*.

  Siten todennäköisyydet määrätään testisuureen Z jakaumasta, kun jakaumaa määrättäessä oletetaan, että *nollahypoteesi* H_0 *pätee*.

Tilastolliset testit

Tilastollinen testaus

Tilastolliset hypoteesit

Tilastolliset testit ja testisuureet

Virheet testauksessa

Merkitsevyystaso ja testin hylkäysalue

\>> Testin *p*-arvo

Testin suorittaminen

p-arvo ja merkitsevyystasot

- Nollahypoteesin H_0 hylkääminen voidaan perustaa etukäteen valitun merkitsevyystason ja sitä vastaavan hylkäysalueen määräämisen **sijasta** testin *p-arvoon*.

- **Testin *p*-arvo on *pienin merkitsevyystaso*, jolla nolla-hypoteesi H_0 voidaan *hylätä*.**

- *Tilastolliset ohjelmistot* tulostavat nykyään lähes aina sovellettavan testin *p*-arvon.

p-arvo 1/2

- Testin ***p*-arvo** määrätään käytännössä seuraavalla tavalla:
  (i) Lasketaan valitun *testisuureen arvo* havainnoista.
  (ii) Määrätään
  – *olettaen*, *että nollahypoteesi* H_0 *pätee* –
  todennäköisyys sille, että *testisuure saa* (normaaliarvoonsa verrattuna) *niin poikkeuksellisen arvon kuin se on saanut tai vielä poikkeuksellisempia arvoja*.

p-arvo 2/2

- Oletetaan, että testin *p*-arvoksi saadaan *pieni* luku.
- Tällöin *testisuure on saanut arvon*, *joka kuuluu – nolla-hypoteesin* H_0 *pätiessä – epätodennäköisten testisuureen arvojen joukkoon*.
- Siten nollahypoteesi voidaan *hylätä*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.
- Mitä *pienempi* on testin *p*-arvo, sitä *vahvempia* todisteita havainnot sisältävät nollahypoteesia H_0 *vastaan*.
- **Huomautus:**

  Testin *p*-arvo määrätään *testisuureen Z jakaumasta*, kun jakauma on määrätty *olettaen*, *että nollahypoteesi* H_0 *pätee*.

p-arvo ja testi päätössääntönä

- Tilastollinen testi eli *päätössääntö*, joka kertoo jokaisessa yksittäisessä tilanteessa eli jokaiselle otokselle, *onko nollahypoteesi* H_0 *hylättävä vai ei*, voidaan perustaa seuraavalla tavalla testin *p*-arvoon:

  (i) Valitaan *pieni* todennäköisyys p_0 .

  (ii) Määrätään testin *p*-arvo.

  Jos $p < p_0$, *hylätään* nollahypoteesi H_0 ja *hyväksytään* vaihtoehtoinen hypoteesi H_1.

  Jos $p \geq p_0$, *jätetään* nollahypoteesi H_0 *voimaan*.

- Todennäköisyyttä p_0 valittaessa on syytä ottaa huomioon *väärän päätöksen seuraukset*.

p-arvon määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 1/6

- Testin *p-arvo* riippuu yksinkertaisissa testausasetelmissa *vaihtoehtoisen hypoteesin muodosta*.
- Olkoon parametria θ koskeva nollahypoteesi yksinkertaista muotoa

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

- Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että testisuureen jakauma on *symmetrinen* origon suhteen.

p-arvon määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 2/6

- Oletetaan, että *testisuureena* on (jatkuva) satunnaismuuttuja Z.
- Tehdään testisuureesta Z seuraavat oletukset:

(1) Testisuureen Z mahdolliset arvot kuuluvat väliin (a, b), jossa voi olla $a = -\infty$ ja $b = +\infty$.

(2a) Testisuureella Z on taipumus saada *suuria* arvoja, jos

$$\theta > \theta_0$$

(2b) Testisuureella Z on taipumus saada *pieniä* arvoja, jos

$$\theta < \theta_0$$

- **Huomautus:**

Yo. oletukset pätevät kaikille tämän esityksen testisuureille.

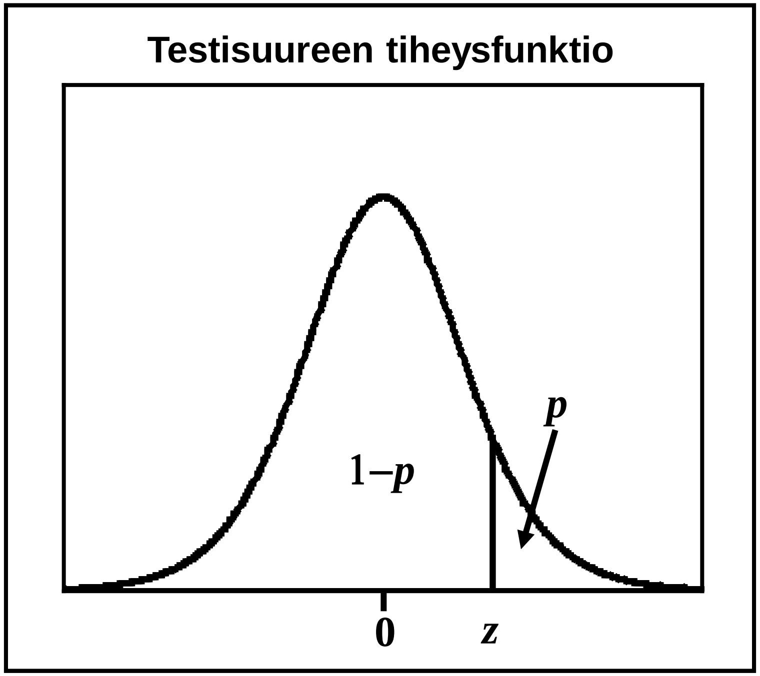
p-arvon määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 3/6

- Olkoon testisuureen Z *havainnoista määrätty arvo* z.
- Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on *yksi-suuntainen vaihtoehto*

$$\mathrm{H}_1 : \theta > \theta_0$$

niin testin *p-arvo* on

$$p = \Pr(Z \geq z \mid \mathrm{H}_0)$$



Testin *p*-arvo

p-arvon määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 4/6

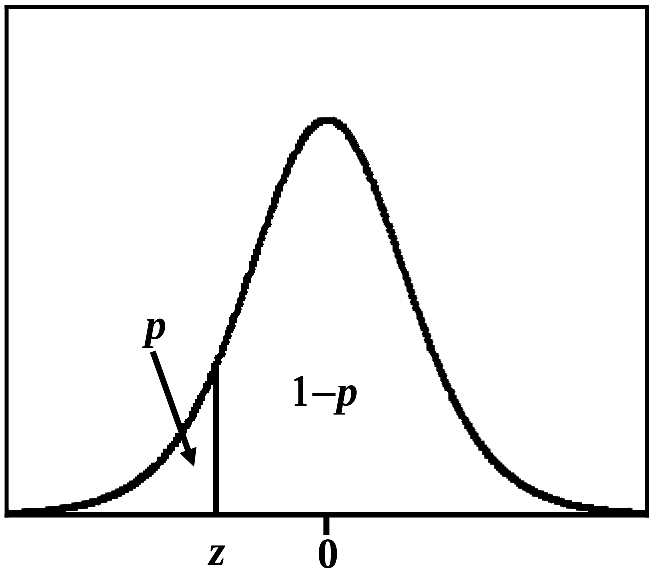
- Olkoon testisuureen Z *havainnoista määrätty arvo* z.
- Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on *yksi-suuntainen vaihtoehto*

$$H_1 : \theta < \theta_0$$

niin testin *p-arvo* on

$$p = \Pr(Z \le z \mid H_0)$$

Testisuureen tiheysfunktio



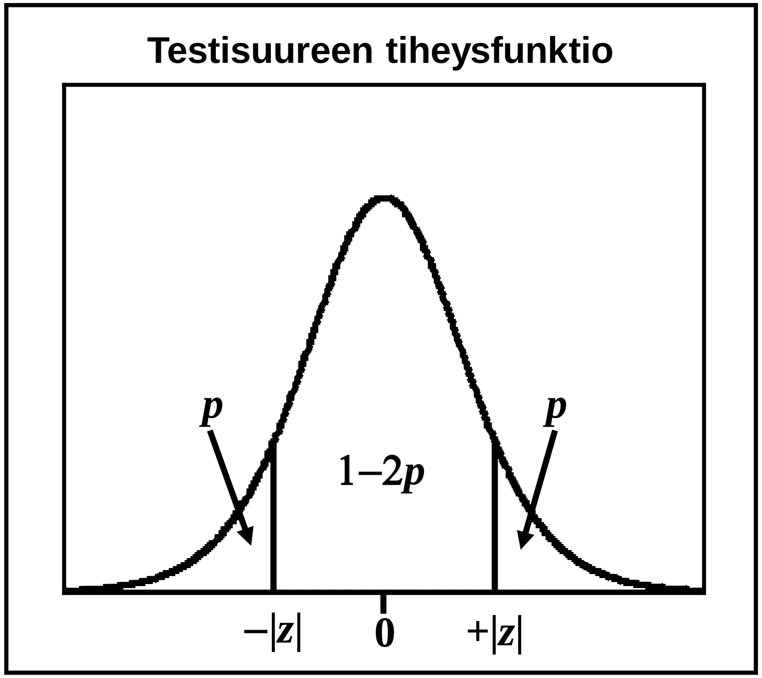
p-arvon määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 5/6

- Olkoon testisuureen Z *havainnoista määrätty arvo* z.
- Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on *kaksi-suuntainen vaihtoehto*

  $$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

  niin testin *p-arvo* on

  $$2p = 2 \times \Pr(Z \geq |z| \mid H_0)$$



p-arvon määrääminen yksinkertaisissa testausasetelmissa 6/6

- **Huomautus:**

  Kalvojen 3/6-5/6 todennäköisyydet ovat *ehdollisia todennäköisyyksiä*, joissa ehtotapahtumana on se, että *nollahypoteesi* H_0 *pätee*.

  Siten todennäköisyydet määrätään testisuureen Z jakaumasta, kun jakaumaa määrättäessä oletetaan, että *nollahypoteesi* H_0 *pätee*.

Tilastolliset testit

Tilastollinen testaus

Tilastolliset hypoteesit

Tilastolliset testit ja testisuureet

Virheet testauksessa

Merkitsevyystaso ja testin hylkäysalue

Testin *p*-arvo

>> Testin suorittaminen

Testin suorittaminen merkitsevyystason valintaan perustuvassa testausmenettelyssä 1/3

- Jos testi perustetaan *merkitsevyystason valintaan*, testin suorittamisessa on seuraavat vaiheet:

  (1) Asetetaan testin **hypoteesit**:
  - *Yleinen hypoteesi* H
  - Testauksen kohteena oleva *nollahypoteesi* H_0
  - *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1

  (2) Valitaan testiä varten **testisuure**.
  - Testisuureen tehtävänä on mitata *havaintojen ja nollahypoteesin* H_0 *yhteensopivuutta*.

Testin suorittaminen merkitsevyystason valintaan perustuvassa testausmenettelyssä 2/3

(3) Valitaan **merkitsevyystaso** α ja konstruoidaan sitä vastaava **hylkäysalue** testille.

(4) Poimitaan **otos** niin, että *yleisen hypoteesin* H oletukset *pätevät*.

- Jos havaintojen sisältämät todisteet nolla-hypoteesia H_0 vastaan ovat testisuureella mitattuna *kyllin vahvoja*, nollahypoteesi H_0 *hylätään* ja vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 *hyväksytään*.

(5) Määrätään valitun **testisuureen arvo** havainnoista.

Testin suorittaminen merkitsevyystason valintaan perustuvassa testausmenettelyssä 3/3

(6) Tehdään **päätös** nollahypoteesin hylkäämisestä.

- Jos testisuureen arvo *joutuu hylkäysalueelle*, *hylätään* nollahypoteesi H_0 ja *hyväksytään* vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 .
- Jos testisuureen arvo *ei joudu hylkäysalueelle*, *jätetään* nollahypoteesi H_0 *voimaan*.

Testin suorittaminen *p*-arvon määräämiseen perustuvassa testausmenettelyssä 1/3

- Jos testi perustetaan testisuureen arvoa vastaaviin *p-arvoihin*, testin suorittamisessa on seuraavat vaiheet:

(1) Asetetaan testin **hypoteesit**:

- *Yleinen hypoteesi* H
- Testauksen kohteena oleva *nollahypoteesi* H_0
- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1

(2) Valitaan testiä varten **testisuure**.

- Testisuureen tehtävänä on mitata *havaintojen ja nollahypoteesin* H_0 *yhteensopivuutta*.

Testin suorittaminen *p*-arvon määräämiseen perustuvassa testausmenettelyssä 2/3

(3) Poimitaan **otos** niin, että *yleisen hypoteesin* H oletukset *pätevät*.

- Jos havaintojen sisältämät todisteet nolla-hypoteesia H_0 vastaan ovat testisuureella mitattuna *kyllin vahvoja*, nollahypoteesi H_0 *hylätään* ja vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 *hyväksytään*.

(4) Määrätään valitun **testisuureen arvo** havainnoista.

(5) Määrätään testisuureen havaittua arvoa vastaava ***p*-arvo**.

Testin suorittaminen *p*-arvon määräämiseen perustuvassa testausmenettelyssä 3/3

(6) Tehdään **päätös** nollahypoteesin hylkäämisestä.

- Jos testin *p*-arvo *on kyllin pieni*, *hylätään* nollahypoteesi H_0 ja *hyväksytään* vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 .
- Jos testin *p*-arvo *ei ole kyllin pieni*, *jätetään* nollahypoteesi H_0 *voimaan*.

Tilastolliset menetelmät

Osa 3: Tilastolliset testit

>> Testejä odotusarvolle ja varianssille

Testit suhteellisille osuuksille

Normaalijakauman parametrien tilastolliset testit 1/2

- **Normaalijakauma** on *tilastotieteen tärkein jakauma*.
- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa **parametrein** μ ja σ^2 :

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Tällöin

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

on normaalijakauman *odotusarvo* ja

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

on normaalijakauman *varianssi*.

- Parametrit μ ja σ^2 *määräävät täysin normaalijakauman*.

Normaalijakauman parametrien tilastolliset testit 2/2

- *Normaalijakauman parametreja koskevat testit* voidaan jakaa kahteen ryhmään:
  - **Yhden otoksen testit**
  - **Kahden otoksen testit** eli **vertailutestit**
- *Yhden otoksen testeissä* testataan yksinkertaisia nollahypoteeseja, jotka koskevat normaalijakauman odotusarvo- tai varianssiparametria.
- *Kahden otoksen testit* ovat *vertailutestejä*, joilla verrataan kahden normaalijakauman odotusarvo- tai varianssi-parametreja toisiinsa.

Normaalijakauman parametreille tarkoitettujen testien yleinen soveltuvuus 1/2

- **Testejä normaalijakauman odotusarvolle** *sovelletaan usein* myös sellaisissa *tilanteissa*, *joissa havainnot eivät noudata normaalijakaumaa*.
- Tätä käytäntöä voidaan perustella seuraavalla tavalla:

(i) Esitettävät testit odotusarvolle perustuvat havaintojen *aritmeettisiin keskiarvoihin*.

(ii) *Keskeisen raja-arvolauseen* mukaan myös ei-normaalisten havaintojen aritmeettiset keskiarvot noudattavat – tietyin ehdoin – *suurissa otoksissa approksimatiivisesti normaalijakaumaa*.

Normaalijakauman parametreille tarkoitettujen testien yleinen soveltuvuus 2/2

- Sen sijaan **testit normaalijakauman varianssille** *eivät yleensä ole käyttökelpoisia ei-normaalisille havainnoille* ja tilanne ei välttämättä parane suurillakaan havaintojen lukumäärillä.

Tavanomaiset testit normaalijakauman parametreille

- Tarkastelemme seuraavia *testejä normaalijakauman parametreille*:
  - **Yhden otoksen *t*-testi odotusarvolle**
  - **Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A odotusarvoille: Yleinen tapaus**
  - ***t*-testi parivertailuille**
  - **Yhden otoksen χ^2-testi varianssille**

Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

Testit normaalijakauman parametreille

>> Yhden otoksen *t*-testi

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A:
Yleinen tapaus

***t*-testi parivertailuille**

Yhden otoksen testi varianssille

Testausasetelma: Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (i) Havainnot $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

  (ii) Havainnot X_1 , X_2 , … , X_n ovat *riippumattomia*

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0 \\ \mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0 \end{array}\right\} \text{1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi

- Olkoot

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ja

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* parametreille

$\mathrm{E}(X_i) = \mu$, $i = 1, 2, \ldots, n$

ja

$\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Yhden otoksen *t*-testi
Testisuure ja sen jakauma

- Määritellään ***t*-testisuure**

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

pätee, niin testisuure *t* noudattaa *Studentin t-jakaumaa* vapausastein ($n - 1$):

$$t \sim t(n-1)$$

- ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**.

Yhden otoksen *t*-testi

t-testisuure mittaa tilastollista etäisyyttä

- Testisuure

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

mittaa havaintoarvojen aritmeettisen keskiarvon ja nolla-hypoteesin $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ kiinnittämän odotusarvoparametrin μ arvon μ_0 *tilastollista etäisyyttä*.

- *Mittayksikkönä* on erotuksen $\bar{X} - \mu_0$ standardipoikkeaman

$$\sigma / \sqrt{n}$$

estimaattori, jota määrättäessä on oletettu, että nolla-hypoteesi H_0 pätee.

Yhden otoksen *t*-testi
Testi

- Testisuureen

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* $H_0 : \mu = \mu_0$ *pätiessä*

$$E(t) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen *t* arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *voidaan hylätä*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.

Testin hylkäysalueen määrääminen 1/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$$

niin *kriittinen arvo* $+t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t \geq +t_\alpha) = \alpha$$

jossa

$$t \sim t(n-1)$$

- Tällöin testin **hylkäysalue** on muotoa

$$(+t_\alpha\,, +\infty)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 2/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

  $$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$$

  niin *kriittinen arvo* $-t_\alpha$ saadaan ehdosta

  $$\Pr(t \le -t_\alpha) = \alpha$$

  jossa

  $$t \sim t(n-1)$$

- Tällöin testin **hylkäysalue** on muotoa

  $$(-\infty\ , -t_\alpha)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 3/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$$

niin *kriittiset arvot* $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(t \leq -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

$$\Pr(t \geq +t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa

$$t \sim t(n-1)$$

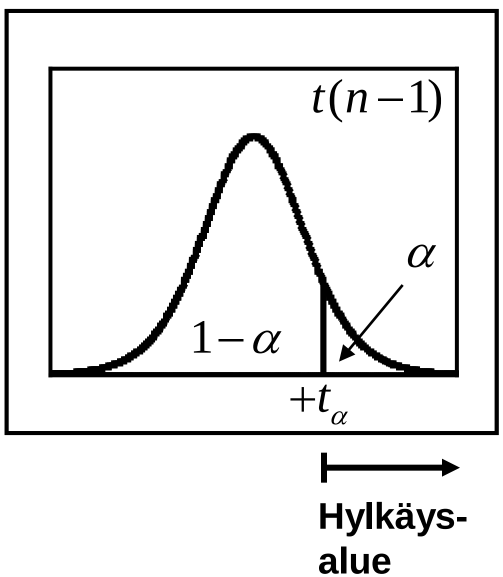
- Tällöin testin **hylkäysalue** on muotoa

$$(-\infty\ , -t_{\alpha}) \cup (+t_{\alpha}\ , +\infty)$$

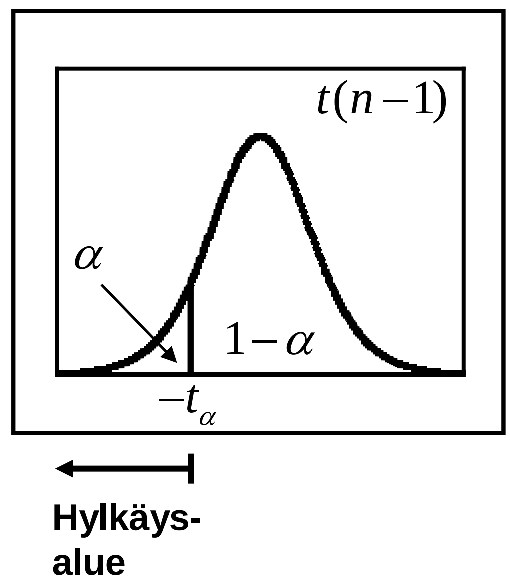
Testin hylkäysalueen määrääminen 4/4

- Oletetaan, että testin *merkitsevyystasoksi* on valittu α.
- Testin **hylkäysalueen** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.

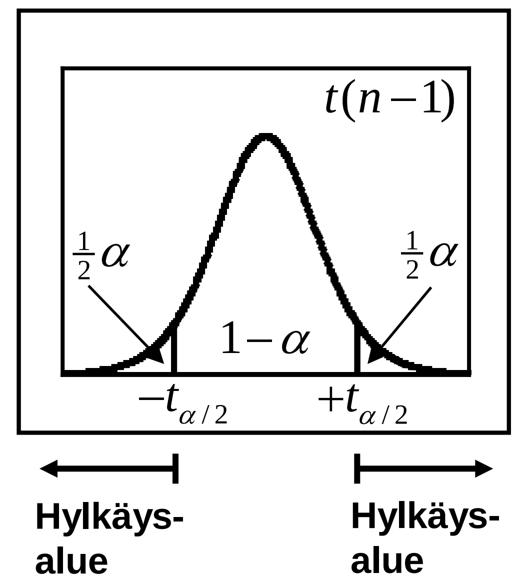
$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$



$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$



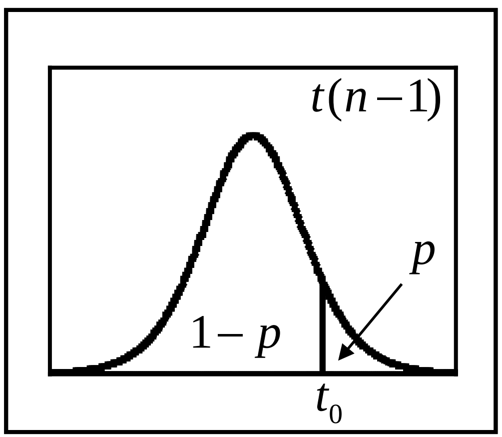
$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$



Testin *p*-arvo

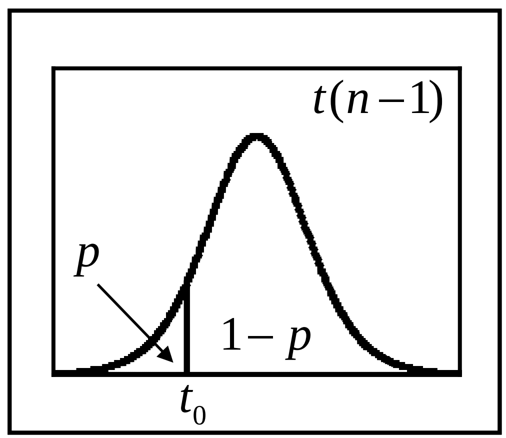
- Olkoon *t-testisuureen* havaittu arvo t_0.
- Testin ***p*-arvon** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.

$H_1 : \mu > \mu_0$



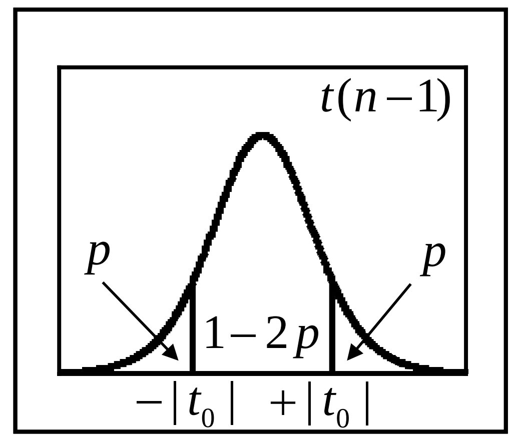
Testin *p*-arvo = *p*

$H_1 : \mu < \mu_0$



Testin *p*-arvo = *p*

$H_1 : \mu \neq \mu_0$



Testin *p*-arvo = 2*p*

Yhden otoksen *t*-testi

Normaalisuusoletuksen merkitys

- Yhden otoksen *t*-testin yleisessä hypoteesissa oletetaan, että havainnot ovat *normaalijakautuneita*. *t*-testi *ei* kuitenkaan *ole herkkä poikkeamille normaalisuudesta*, jos havaintojen lukumäärä n on ”*kyllin suuri*”.
- *Testiä on melko turvallista käyttää*, kun havaintojen lukumäärä

  $$n > 15$$

  ellei havaintojen jakauma *ole kovin vino* ja havaintojen joukossa *ole poikkeavia havaintoja*.
- Jos havaintojen lukumäärä

  $$n > 40$$

  testiä voidaan melko turvallisesti käyttää jopa selvästi vinoille havaintojen jakaumille.

Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

Testit normaalijakauman parametreille

Yhden otoksen *t*-testi

>> Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A:
Yleinen tapaus

***t*-testi parivertailuille**

Yhden otoksen testi varianssille

Testausasetelma: Yleinen hypoteesi

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (1) Havainnot $X_{i1} \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n_1$

  (2) Havainnot $X_{j2} \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, $j = 1, 2, \ldots, n_2$

  (3) Havainnot X_{i1} ja X_{j2} ovat *riippumattomia* kaikille i ja j.

- **Huomautuksia:**
  - Oletus (3) sisältää *kolme riippumattomuusoletusta*:
    - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *sisällä*.
    - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *välillä*.
  - Jakaumien varianssit *saavat* (*mutta ei tarvitse*) *erota toisistaan*.

Testausasetelma: Nollahypoteesi ja vaihtoehtoiset hypoteesit

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}_1 : \mu_1 > \mu_2 \\ \mathrm{H}_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{array}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi

- Olkoot

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} \text{ , } k = 1, 2$$

ja

$$s_k^2 = \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k}(X_{ik} - \bar{X}_k)^2 \text{ , } k = 1, 2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* parametreille

$$\mathrm{E}(X_{ik}) = \mu_k \text{ , } i = 1, 2, \dots, n_k \text{ , } k = 1, 2$$

ja

$$\mathrm{Var}(X_{ik}) = \sigma_k^2 \text{ , } i = 1, 2, \dots, n_k \text{ , } k = 1, 2$$

Testisuure ja sen asymptoottinen jakauma

- Määritellään ***t*-testisuure**

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

pätee, niin *testisuure t noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa* N(0,1):

$$t \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

Testisuureen jakauman approksimointi 1/2

- *Pienissä otoksissa* saadaan testisuureen *t* jakaumalle *parempi approksimaatio* käyttämällä approksimaationa *Studentin t-jakaumaa* vapausastein (ns. Satterthwaiten approksimaatio)

$$\nu = \frac{\left[\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\dfrac{1}{n_1 - 1}\left[\dfrac{s_1^2}{n_1}\right]^2 + \dfrac{1}{n_2 - 1}\left[\dfrac{s_2^2}{n_2}\right]^2}$$

Testisuureen jakauman approksimointi 2/2

- Joskus testisuureen t jakaumaa approksimoidaan myös *Studentin t-jakaumalla* vapausastein

$$v = \min\{n_1 - 1, n_2 - 1\}$$

- Tämä approksimaatio *ei* kuitenkaan *ole yhtä hyvä* kuin Satterthwaiten approksimaatio.

t-testisuure mittaa tilastollista etäisyyttä

- Testisuure

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

  mittaa otoksien 1 ja 2 aritmeettisten keskiarvojen *tilastollista etäisyyttä*.

- *Mittayksikkönä* on erotuksen $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ standardipoikkeaman

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

  estimaattori, jota määrättäessä on oletettu, että nolla-hypoteesi H_0 pätee.

Testi

- Testisuureen

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$ *pätiessä*

$$\mathrm{E}(t) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen t arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *voidaan hylätä*, jos testin p-arvo on *kyllin pieni*.

Testin hylkäysalueen määrääminen 1/5

- Käsittelemme seuraavassa *kahden otoksen t-testin A hylkäysalueen valintaa*, jos testisuureen approksimoidaan *standardoidulla normaalijakaumalla* N(0, 1).
- Jos kahden otoksen *t*-testin A testisuuretta approksimoidaan *t-jakaumalla*, jossa vapausasteiden lukumäärä ν lasketaan Satterthwaiten kaavan mukaan, testin hylkäysalue määrätään samalla tavalla kuin yhden otoksen *t*-testin tapauksessa.

Testin hylkäysalueen määrääminen 2/5

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

  $$\mathrm{H}_1 : \mu_1 > \mu_2$$

  niin *kriittinen arvo* $+t_\alpha$ saadaan ehdosta

  $$\Pr(t \geq +t_\alpha) = \alpha$$

  jossa

  $$t \sim_a \mathrm{N}(0, 1)$$

- Tällöin testin **hylkäysalue** on muotoa

  $$(+t_\alpha\, , +\infty)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 3/5

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu_1 < \mu_2$$

niin *kriittinen arvo* $-t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t \leq -t_\alpha) = \alpha$$

jossa

$$t \sim_a \mathrm{N}(0, 1)$$

- Tällöin testin **hylkäysalue** on muotoa

$$(-\infty\ , -t_\alpha)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 4/5

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

  $$\mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

  niin *kriittiset arvot* $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

  $$\Pr(t \leq -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

  $$\Pr(t \geq +t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

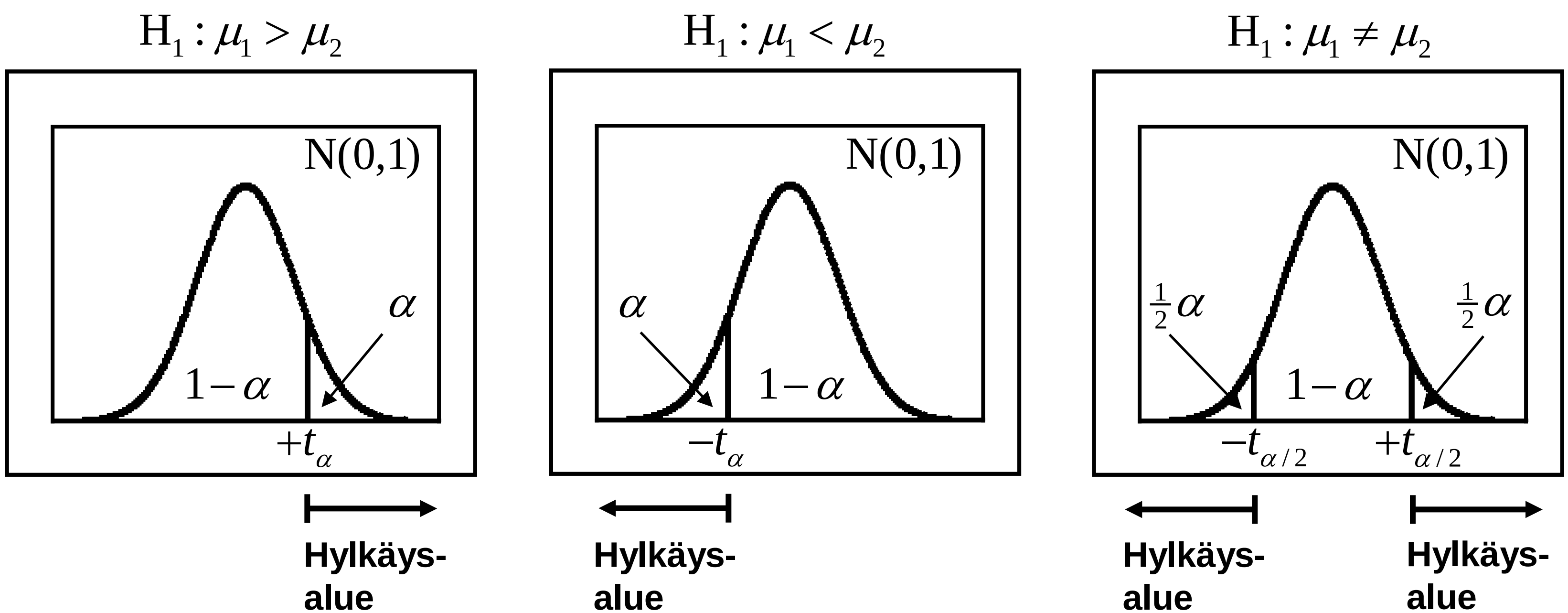
  jossa

  $$t \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$
- Tällöin testin **hylkäysalue** on muotoa

  $$(-\infty\ , -t_{\alpha}) \cup (+t_{\alpha}\ , +\infty)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 5/5

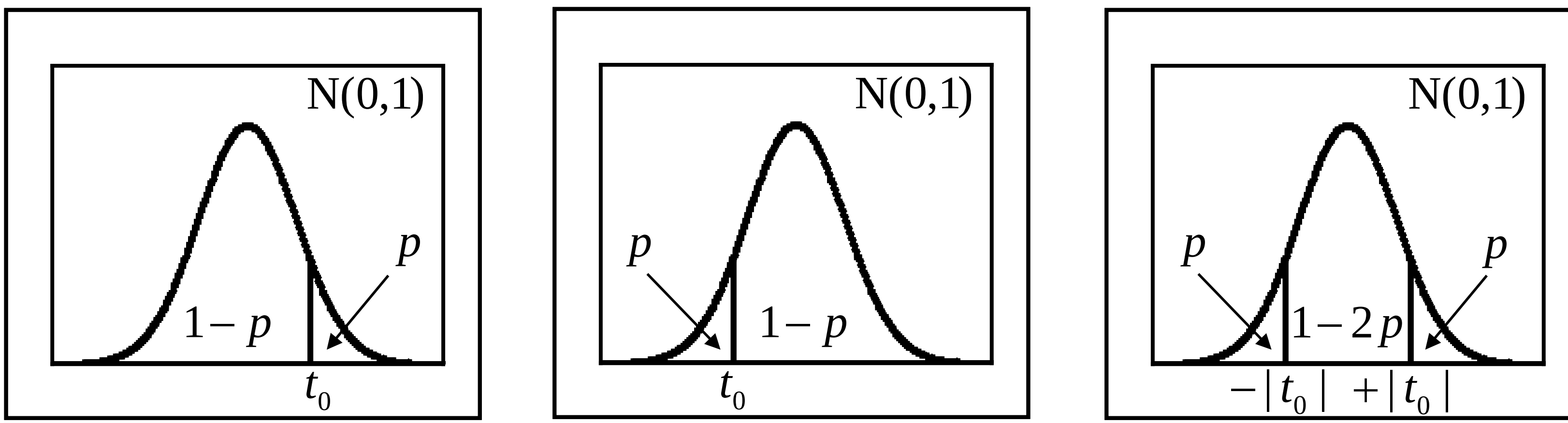
- Oletetaan, että testin *merkitsevyystasoksi* on valittu α.
- Testin **hylkäysalueen** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.



Testin *p*-arvo

- Olkoon *t-testisuureen* havaittu arvo t_0.
- Testin ***p*-arvon** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ $\quad$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ $\quad$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$



Testin *p*-arvo = *p* $\quad$ Testin *p*-arvo = *p* $\quad$ Testin *p*-arvo = 2*p*

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A: Yleinen tapaus

Normaalisuusoletuksen merkitys

- Kahden otoksen *t*-testin A yleisen hypoteesin mukaan havainnot ovat molemmissa otoksissa *normaali-jakautuneita*.Testi *ei* kuitenkaan *ole herkkä poikkeamille normaalisuudesta*, jos molempien otosten otoskoot ovat ”*kyllin suuria*”.
- *Testiä on melko turvallista käyttää*, kun

  $$n_1 > 15 \text{ ja } n_2 > 15$$

  ja n_1 ja n_2 eivät eroa toisistaan kovin paljon, *elleivät* havaintojen jakaumat *ole kovin vinoja* ja *ellei* havaintojen joukossa *ole poikkeavia havaintoja*.
- Jos

  $$n_1 > 40 \text{ ja } n_2 > 40$$

  testiä voidaan melko turvallisesti käyttää jopa selvästi vinoille havaintojen jakaumille.

Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

Testit normaalijakauman parametreille

Yhden otoksen *t*-testi

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A:
Yleinen tapaus

>> *t*-testi parivertailuille

Yhden otoksen testi varianssille

t-testi parivertailuille

Parivertailuasetelma

- **Parivertailuasetelma** syntyy tilastollisessa tutkimuksessa esimerkiksi seuraavissa tilanteissa:

  (i) Päämääränä on *verrata kahta mittaria* mittaamalla molemmilla mittareilla samat kohteet *samoissa olosuhteissa*.

  (ii) Päämääränä on *tutkia* jonkin *käsittelyn vaikutusta* mittaamalla samat kohteet *ennen* käsittelyä ja käsittelyn *jälkeen*.

  (iii) Päämääränä on *vertailla kahta perusjoukkoa* mittaamalla saman muuttujan arvot perusjoukkojen alkioiden *sovitetuissa pareissa*.

***t*-testi parivertailuille**

Testausasetelma 1/2

- Oletetaan, että havainnot muodostuvat muuttujaa X koskevista mittaustuloksien *pareista*

$$(X_{i1}\ , X_{i2})\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

  jotka ovat *riippumattomia*.
- Päämääränä on *verrata mittauksia* toisiinsa:

  Antavatko mittaukset *keskimäärin saman tuloksen*?
- ***Tällaisissa parivertailuasetelmissa ei saa käyttää riippumattomien otoksien t-testiä* A, koska *mittaus-tulokset* X_{i1} ja X_{i2} *eivät yleensä ole riippumattomia*.**

Testausasetelma 2/2

- Muodostetaan mittaustuloksien X_{i1} ja X_{i2} *erotukset*

$$D_i = X_{i1} - X_{i2}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

- Mittaukset 1 ja 2 antavat *keskimäärin saman tuloksen*, jos erotukset D_i saavat *keskimäärin arvon nolla*.

- Parivertailuasetelman testausongelman ratkaisuna on tavanomainen **yhden otoksen *t*-testi** mittaustuloksien X_{i1} ja X_{i2} *erotuksien* D_i *odotusarvolle*.

Testausasetelma: Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

(1) Erotukset $D_i \sim \mathrm{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

(2) Erotukset D_1 , D_2 , … , D_n ovat riippumattomia

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : \mu_D = 0$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}_1 : \mu_D > 0 \\ \mathrm{H}_1 : \mu_D < 0 \end{aligned}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu_D \neq 0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

***t*-testi parivertailuille**

Parametrien estimointi

- Olkoot

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$$

ja

$$s_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* parametreille

$\mathrm{E}(D_i) = \mu_D$, $i = 1, 2, \ldots , n$

ja

$\mathrm{Var}(D_i) = \sigma_D^2$, $i = 1, 2, \ldots , n$

Testisuure ja sen jakauma

- Määritellään ***t*-testisuure**

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mu_D = 0$$

pätee, niin testisuure *t* noudattaa *Studentin t-jakaumaa* vapausastein (n – 1):

$$t \sim t(n-1)$$

t-testisuure mittaa tilastollista etäisyyttä

- Testisuure

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}}$$

mittaa havaintoarvojen erotuksien aritmeettisen keskiarvon *tilastollista etäisyyttä* nollasta.

- *Mittayksikkönä* on erotuksien D_i aritmeettisen keskiarvon $\bar{D}$ standardipoikkeaman

$$\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}$$

estimaattori, jota määrättäessä on oletettu, että nolla-hypoteesi H_0 pätee.

Testi

- Testisuureen

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* $\mathrm{H}_0 : \mu_D = 0$ *pätiessä*

$$\mathrm{E}(t) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen *t* arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *voidaan hylätä*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.

Testin hylkäysalueen määrääminen ja testin *p*-arvo

- Parivertailutestin **hylkäysalueen** *valinta* tapahtuu kuten yhden otoksen *t*-testin tapauksessa.
- Parivertailutestin testisuureen arvoa vastaavan ***p*-arvon** *määrääminen* tapahtuu kuten yhden otoksen *t*-testin tapauksessa.

t-testi parivertailuille

Normaalisuusoletuksen merkitys

- Parivertailuasetelman *t*-testin yleisessä hypoteesissa oletetaan, että havaintoarvojen erotukset ovat *normaali-jakautuneita*.Testi *ei* kuitenkaan *ole herkkä poikkeamille normaalisuudesta*, jos havaintojen lukumäärä n on ”*kyllin suuri*”.
- *Testiä on melko turvallista käyttää*, kun

  $$n > 15$$

  ellei erotusten jakauma *ole kovin vino* ja erotuksien joukossa *ole poikkeavia erotuksia*.
- Jos havaintojen lukumäärä

  $$n > 40$$

  testiä voidaan melko turvallisesti käyttää jopa selvästi vinoille erotuksien jakaumille.

Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

Testit normaalijakauman parametreille

Yhden otoksen *t*-testi

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A:
Yleinen tapaus

t-testi parivertailuille

>> Yhden otoksen testi varianssille

Testausasetelma: Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (1) Havainnot $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

  (2) Havainnot X_1 , X_2 , … , X_n ovat *riippumattomia*.

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ \mathrm{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array}\right\} \text{1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Yhden otoksen testi varianssille
Parametrien estimointi

- Olkoot

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ja

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* parametreille

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

ja

$$\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

Yhden otoksen testi varianssille

Testisuure ja sen jakauma

- Määritellään $\boldsymbol{\chi^2}$**-testisuure**

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

pätee, niin testisuure χ^2 noudattaa χ^2-*jakaumaa* vapaus-asteein (n – 1):

$$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**.

Testi

- Testisuureen

  $$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

  normaaliarvo = (n – 1), koska *nollahypoteesin* $\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ *pätiessä* E(s^2) = σ_0^2, jolloin

  $$\mathrm{E}(\chi^2) = n - 1$$

- Siten sekä *pienet* että *suuret* testisuureen χ^2 arvot sen normaaliarvoon (n – 1) nähden viittaavat siihen, että *nollahypoteesi ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *voidaan hylätä*, jos testin p-arvo on *kyllin pieni*.

Yhden otoksen testi varianssille
Testin hylkäysalueen määrääminen 1/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

  $$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

  niin *kriittinen raja* χ_α^2 saadaan ehdosta

  $$\Pr(\chi^2 \geq \chi_\alpha^2) = \alpha$$

  jossa

  $$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

- Tällöin testin **hylkäysalue** on muotoa

  $$(\chi_\alpha^2 , +\infty)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 2/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

  $$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

  niin *kriittinen raja* $\chi^2_{1-\alpha}$ saadaan ehdosta

  $$\Pr(\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}) = \alpha$$

  jossa

  $$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

- Tällöin testin **hylkäysalue** on muotoa

  $$(0\ ,\ \chi^2_{1-\alpha})$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 3/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

niin *kriittiset rajat* $\chi^2_{1-\alpha/2}$ ja $\chi^2_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}) = \alpha/2$$

$$\Pr(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa

$$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

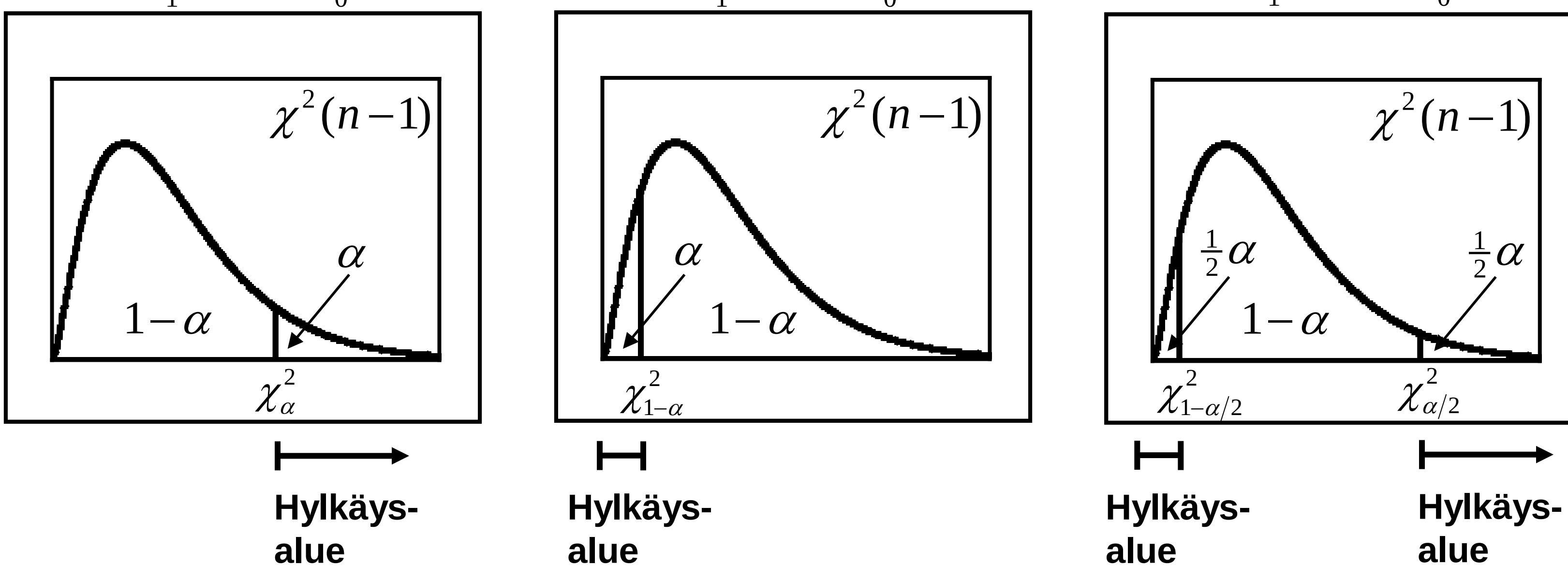
- Tällöin testin **hylkäysalue** on muotoa

$$(0\ ,\ \chi^2_{1-\alpha/2}) \cup (\chi^2_{\alpha/2}\ ,\ +\infty)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 4/4

- Oletetaan, että testin *merkitsevyystasoksi* on valittu α.
- Testin **hylkäysalueen** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.

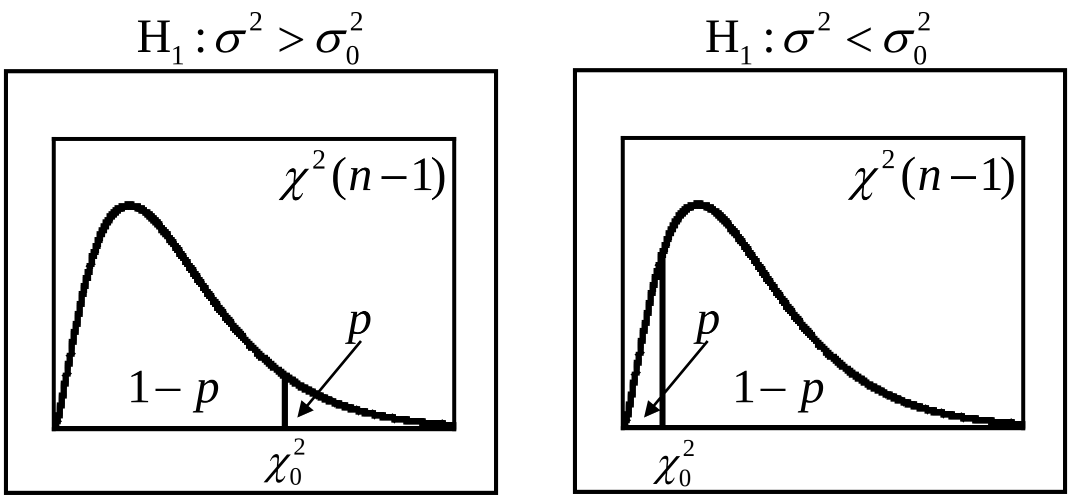
$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\mathrm{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ $\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$



Yhden otoksen testi varianssille

Testin *p*-arvo 1/2

- Olkoon χ^2-*testisuureen* havaittu arvo χ_0^2.
- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on 1-*suuntainen*, testin ***p*-arvon** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.



Testin *p*-arvo = *p*   Testin *p*-arvo = *p*

Testin *p*-arvo 2/2

- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on 2-*suuntainen*:

  $$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

  niin tällöin testin ***p*-arvo** on

  $$p = 2 \times \min\left\{\Pr(\chi^2 \geq \chi_0^2), \Pr(\chi^2 \leq \chi_0^2)\right\}$$

  jossa

  $$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Normaalisuusoletuksen merkitys

- Tässä esitetyn varianssitestin yleisessä hypoteesissa oletetaan, että havainnot ovat *normaalijakautuneita*.
- Testi *on herkkä poikkeamille normaalisuudesta* ja *testi ei toimi kovinkaan hyvin*, jos havaintojen jakauma *on vino* tai havaintojen joukossa *on poikkeavia havaintoja*.
- Suuretkaan havaintojen lukumäärät eivät yleensä paranna tilannetta.

Tilastolliset menetelmät

Osa 3: Tilastolliset testit

Testejä odotusarvolle ja varianssille

>> Testit suhteellisille osuuksille

Testit laatueroasteikollisille muuttujille

>> Laatueroasteikollisten muuttujien testit

Testi suhteelliselle osuudelle

Suhteellisten osuuksien vertailutesti

Testit laatueroasteikollisille muuttujille

- Tarkastelemme seuraavia testejä *laatueroasteikollisille* muuttujille:
  - **Testi suhteelliselle osuudelle**
  - **Suhteellisten osuuksien vertailutesti**
- Huomaa, että testejä saa – ja on usein myös järkevää – käyttää *järjestys*-, *välimatka*- ja *suhde-asteikollisille muuttujille*.

- Testit ovat *parametrisia testejä*, joissa testauksen kohteena on **Bernoulli-jakauman odotusarvoparametri**.
- *Testi suhteelliselle osuudelle* on **yhden otoksen testi**.
- *Suhteellisten osuuksien vertailutesti* on **kahden otoksen testi**.

Testit laatueroasteikollisille muuttujille

Laatueroasteikollisten muuttujien testit

>> Testi suhteelliselle osuudelle

Suhteellisten osuuksien vertailutesti

Testi suhteelliselle osuudelle

Testausasetelma 1/3

- Olkoon A perusjoukon S *tapahtuma* ja olkoot

$$\Pr(A) = p$$

$$\Pr(A^c) = 1 - p = q$$

- Määritellään satunnaismuuttuja X:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{jos } A \text{ sattuu} \\ 0, & \text{jos } A \text{ ei satu} \end{cases}$$

- Tällöin $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ ja

$$\Pr(X = 1) = p$$

$$\Pr(X = 0) = 1 - p = q$$

Testi suhteelliselle osuudelle

Testausasetelma 2/3

- Oletetaan, että tapahtuma A on muotoa

  A = ”Perusjoukon S alkiolla on ominaisuus P”

- Tällöin

  $$p = \Pr(A)$$

  on todennäköisyys poimia perusjoukosta S satunnaisesti alkio, jolla on ominaisuus P.

- Jos perusjoukko S on *äärellinen*, niin todennäköisyys p kuvaa niiden perusjoukon S alkioiden *suhteellista osuutta*, joilla on ominaisuus P.

Testausasetelma 3/3

- Olkoon X_1 , X_2 , … , X_n *yksinkertainen satunnaisotos* perusjoukosta S, joka noudattaa *Bernoulli-jakaumaa*

  Bernoulli(p)

- Asetetaan Bernoulli-jakauman *parametrille p nollahypoteesi*

  $H_0 : p = p_0$

- Testausongelma:

  Ovatko havainnot *sopusoinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?

- Ratkaisuna on **testi suhteelliselle osuudelle**.

Testi suhteelliselle osuudelle

Testausasetelma: Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

(1) Havainnot $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jossa

$p = \Pr(A)$, $A \subset S$

(2) Havainnot X_1 , X_2 , … , X_n ovat *riippumattomia*

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : p = p_0$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}_1 &: p > p_0 \\ \mathrm{H}_1 &: p < p_0 \end{aligned}\right\} \text{1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : p \neq p_0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Testi suhteelliselle osuudelle

Parametrien estimointi

- Olkoon f *tapahtuman A frekvenssi* siinä n-kertaisessa *toistokokeessa*, jota riippumattomien havaintojen poimiminen Bernoulli-jakaumasta merkitsee.
- Tällöin tapahtuman *A suhteellinen frekvenssi* eli *osuus*

$$\hat{p} = f / n$$

on *harhaton estimaattori* Bernoulli-jakauman parametrille

$$\mathrm{E}(X_i) = p \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

- Huomaa, että frekvenssi f noudattaa *binomijakaumaa* parametrein n ja p:

$$f = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

Testi suhteelliselle osuudelle

Testisuure ja sen asymptoottinen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä

- Määritellään **testisuure**

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : p = p_0$$

pätee, niin testisuure z noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

- Approksimaatio on tavallisesti *riittävän hyvä*, jos

$$n\hat{p} \geq 10 \text{ ja } n(1-\hat{p}) \geq 10$$

Testi suhteelliselle osuudelle: Testisuure *z* mittaa tilastollista etäisyyttä

- Testisuure

  $$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

  mittaa parametrin p estimaatin $\hat{p}$ ja nollahypoteesin $H_0 : p = p_0$ kiinnittämän parametrin p arvon p_0 *tilastollista etäisyyttä*.
- *Mittayksikkönä* on erotuksen $\hat{p} - p_0$ standardipoikkeaman

  $$\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}$$

  estimaattori, joka on määrätty olettaen, että nollahypoteesi H_0 pätee.

Testi

- Testisuureen

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$E(z) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin p-arvo on *kyllin pieni*.
- Hylkäysalueen valinta ja p-arvon määrääminen: ks. lukua **Tilastollinen testaus.**

Testit laatueroasteikollisille muuttujille

Laatueroasteikollisten muuttujien testit

Testi suhteelliselle osuudelle

>> Suhteellisten osuuksien vertailutesti

Suhteellisten osuuksien vertailutesti

Testausasetelma 1/4

- Olkoon A perusjoukon S_k , $k = 1, 2$ *tapahtuma* ja olkoot

$$\Pr(A) = p_k$$

$$\Pr(A^c) = 1 - p_k = q_k$$

- Määritellään satunnaismuuttujat X_k , $k = 1, 2$:

$$X_k = \begin{cases} 1, \text{ jos } A \text{ tapahtuu perusjoukossa } S_k \\ 0, \text{ jos } A \text{ ei tapahdu perusjoukossa } S_k \end{cases}$$

- Tällöin $X_k \sim \text{Bernoulli}(p_k)$, $k = 1, 2$ ja

$$\Pr(X_k = 1) = p_k$$

$$\Pr(X_k = 0) = 1 - p_k = q_k$$

Testausasetelma 2/4

- Oletetaan, että tapahtuma A on muotoa

  A = ”Perusjoukon alkiolla on ominaisuus P”

- Tällöin

  $$p_k = \Pr(A)$$

  on todennäköisyys poimia perusjoukosta S_k , k = 1, 2 satunnaisesti alkio, jolla on ominaisuus P.

- Jos perusjoukko S_k , k = 1, 2 on *äärellinen*, niin todennäköisyys p_k kuvaa niiden perusjoukon S_k alkioiden *suhteellista osuutta*, joilla on ominaisuus P.

Testausasetelma 3/4

- Olkoon

  $$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}$$

  yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S_1, joka noudattaa *Bernoulli-jakaumaa*

  $$\text{Bernoulli}(p_1)$$

- Olkoon

  $$X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2}$$

  yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S_2, joka noudattaa *Bernoulli-jakaumaa*

  $$\text{Bernoulli}(p_2)$$

- Olkoot otokset lisäksi toisistaan *riippumattomia*.

Testausasetelma 4/4

- Asetetaan Bernoulli-jakaumien *parametreille* p_1 ja p_2 *nollahypoteesi*

$$H_0 : p_1 = p_2 = p$$

- Testausongelma:

  Ovatko havainnot *sopusoinnussa* hypoteesin H_0 kanssa?

- Ratkaisuna on **suhteellisten osuuksien vertailutesti**.

Testausasetelma: Yleinen hypoteesi

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (1) Havainnot $X_{i1} \sim \text{Bernoulli}(p_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n_1$, jossa
  $p_1 = \Pr(A), A \subset S_1$

  (2) Havainnot $X_{j2} \sim \text{Bernoulli}(p_2)$, $j = 1, 2, \ldots, n_2$, jossa
  $p_2 = \Pr(A), A \subset S_2$

  (3) Havainnot X_{i1} ja X_{j2} ovat *riippumattomia* kaikille i ja j

- **Huomautus:**

  Oletus (3) sisältää *kolme riippumattomuusoletusta*:
  - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *sisällä*.
  - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *välillä*.

Suhteellisten osuuksien vertailutesti

Testausasetelma:
Nollahypoteesi ja vaihtoehtoiset hypoteesit

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2 = p$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}_1 : p_1 > p_2 \\ \mathrm{H}_1 : p_1 < p_2 \end{array}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : p_1 \neq p_2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Suhteellisten osuuksien vertailutesti

Parametrien estimointi

- Olkoon f_k *tapahtuman A frekvenssi* siinä n_k-kertaisessa toistokokeessa, jota riippumattomien havaintojen poimiminen Bernoulli-jakaumasta k merkitsee, $k = 1, 2$.
- Tällöin tapahtuman *A suhteellinen frekvenssi* eli *osuus*

$$\hat{p}_k = f_k / n_k \ , k = 1, 2$$

on *harhaton estimaattori* Bernoulli-jakauman parametrille

$$p_k = \mathrm{E}(X_{ik}) \ , i = 1, 2, \ldots , n_k \ , k = 1, 2$$

- Huomaa, että frekvenssi f_k noudattaa *binomijakaumaa* parametrein n_k ja p_k:

$$f_k = \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} \sim \mathrm{Bin}(n_k, p_k) \ , k = 1, 2$$

Yhdistetty otos

- *Jos nollahypoteesi* $\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2 = p$ *pätee*, voidaan otokset *yhdistää* ja parametrin *p harhaton estimaattori* on tapahtuman *A* suhteellinen frekvenssi yhdistetyssä otoksessa:

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{f_1 + f_2}{n_1 + n_2}$$

- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, niin

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) &= \frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2} \\ &= p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \end{aligned}$$

Suhteellisten osuuksien vertailutesti

Testisuure ja sen asymptoottinen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä

- Määritellään **testisuure**

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2 = p$$

pätee, niin testisuure z noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

- Approksimaatio on tavallisesti *riittävän hyvä*, jos

$$n_1\hat{p}_1 \geq 5\,,\; n_1(1-\hat{p}_1) \geq 5\,,\; n_2\hat{p}_2 \geq 5\,,\; n_2(1-\hat{p}_2) \geq 5$$

Suhteellisten osuuksien vertailutesti

Testisuure *z* mittaa tilastollista etäisyyttä

- Testisuure

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

mittaa tapahtuman *A* otoksista 1 ja 2 määrättyjen suhteellisten frekvenssien *tilastollista etäisyyttä*.

- *Mittayksikkönä* on erotuksen $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ standardipoikkeaman

$$\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

estimaattori, joka on määrätty olettaen, että nollahypoteesi H_0 pätee.

Testi

- Testisuureen

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$E(z) = 0$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin p-arvo on *kyllin pieni*.

- Hylkäysalueen valinta ja p-arvon määrääminen:
  ks. lukua **Tilastollinen testaus**.

Tilastolliset menetelmät

Osa 3: Tilastolliset testit

- **Jakaumaoletuksien testaaminen**

χ^2-yhteensopivuustesti 1/2

- Tavanomaisen *t-testin yleisen hypoteesin* mukaan havainnot muodostavat (*yksinkertaisen*) *satunnaisotoksen normaalijakaumasta*.
- Siten *t*-testin yleiseen hypoteesiin sisältyy havaintojen *normaalisuutta koskeva* **jakaumaoletus**.
- Koska *normaalisuusoletuksesta* pidetään kiinni *t*-testiä tehtäessä, *oletusta havaintojen normaalisuudesta on syytä testata erikseen*.

χ^2-yhteensopivuustesti 2/2

- Jakaumaoletuksia koskevia tilastollisia testejä kutsutaan tavallisesti **yhteensopivuustesteiksi**.

- Nimitys johtuu siitä, että yhteensopivuustesteissä tutkitaan *sopivatko havainnot ja havaintojen jakaumasta tehty oletus toisiinsa* eli *ovatko havainnot sopusoinnussa tehdyn jakaumaoletuksen kanssa*.

- *Yleisenä yhteensopivuustestinä* tilastotieteessä käytetään $\boldsymbol{\chi^2}$**-testiä**.

Normaalisuuden testaaminen

- Koska normaalijakaumalla on niin keskeinen asema tilastotieteessä, *havaintojen normaalisuuden* tutkimista varten on kehitetty useita erilaisia menetelmiä.
- Havaintojen normaalisuutta voidaan *testata* yleisellä χ^2*-yhteensopivuustestillä* tai erityisesti *normaalisuus-oletuksen testaamista varten konstruoiduilla testeillä*.
- **Bowmanin ja Shentonin testi** normaalisuudelle perustuu havaintojen *vinouden* ja *huipukkuuden* mittoihin.
- **Wilkin ja Shapiron testi** normaalisuudelle perustuu ns. *rankit plot -kuvioon*, jonka avulla havaintojen normaalisuutta voidaan tutkia *graafisesti*.

χ^2-homogeenisuustesti

- Oletetaan, että tilastollisen tutkimuksen kohteena oleva perusjoukko voidaan jakaa *kahteen* tai *useampaan ryhmään*.
- Tehtävänä on selvittää noudattaako tutkimuksen kohteena olevaa perusjoukon alkioiden ominaisuutta kuvaava muuttuja kaikissa ryhmissä *samaa jakaumaa*.
- Jos muuttuja noudattaa kaikissa ryhmissä *samaa jakaumaa*, havaintoaineisto on tutkimuksen kohteena olevan perusjoukon ominaisuuden suhteen *homogeeninen*.
- *Yleisenä homogeenisuustestinä* tilastotieteessä käytetään **χ^2-testiä**.

χ^2-riippumattomuustesti

- Oletetaan, että tilastollisen tutkimuksen kohteena olevan perusjoukon alkiot voidaan *luokitella ristiin* kahden *faktorin* eli *tekijän* A ja B suhteen.
- Tehtävänä on selvittää ovatko tekijät A ja B *riippumattomia*.
- Jos tekijät A ja B ovat riippumattomia, tekijöitä A ja B voidaan tarkastella *erillisinä*.
- *Yleisenä riippumattomuustestinä* tilastotieteessä käytetään **χ^2-testiä**.
- **Huomautus:**

  Testi voidaan yleistää koskemaan *useamman kuin kahden tekijän* riippumattomuutta.

χ^2-testien jakaumista riippumattomuus ja ei-parametrisuus

- χ^2-testit *yhteensopivuudelle*, *homogeenisuudelle* ja *riippumattomuudelle* ovat **jakaumista riippumattomia**, **ei-parametrisia** testejä:
  (i) Testien yleiset hypoteesit *eivät kiinnitä havaintojen jakaumaa*.
  (ii) Testeissä *ei testata minkään todennäköisyysjakauman parametreja koskevia hypoteeseja*.
  (iii) Näitä testejä ei käydä läpi tällä kurssilla.