Kari Eloranta[1]

Palloista ja pyramideista

Pallojen pakkaus on klassisen diskreetin geometrian keskeisiä ongelmia. Perusmuodossaan se kysyy, millainen on identtisten (hyper)pallojen tiivein pakkaus ja mikä sen tiheys on. Oletetaan, että pallot ovat kovia, eikä reunaehtoja ole, vaan pakkaus kattaa koko avaruuden $\mathbf{R}^d$, $d = 1, 2, 3, \ldots$ Ongelma on osoittautunut erittäin haastavaksi. Sen ratkaisussa on kuitenkin edistytty - viimeksi viime vuonna - ja juuri tähän ja hiukan ympröiväänkin maastoon tämä artikkeli johdattelee.

Yksiulotteinen tapaus on tietenkin triviaali, mutta jo tasopakkauksissa ongelmia ilmaantui. Hilapakkausten joukolla optimaalinen pakkaus syntyy kun kiekkojen keskipisteet ovat kolmiohilalla, mutta senkin todistamiseen tarvittiin Carl Friedrich Gauss. Axel Thue argumentoi jo vuonna 1892, että tämä rakenne on optimaalinen kaikkien tasogeometrioiden joukossa, mutta lopullisen särmänsä todistus saavutti vasta Lazlo Fejes-Tóthin työssä 1940. Maksimitiheys on $\pi/\sqrt{12} \approx 0.9069$.

Fejes-Tóthin idea oli myös oleellinen, kun Thomas Hales kehitti todistusstrategian $\mathbf{R}^3$:lle. Tällöin kohteena oli Keplerin konjektuuri vuodelta 1611 (jonka hän muotoili esseessään ``Strena Seu de Niue Sexangula''eli ``Kuusikulmaisesta lumihiutaleesta''). Se esittää ratkaisuksi pintakeskistä kuutiollista hilaa (face centered cubic, fcc), jonka jälleen Gauss todisti optimaaliseksi kaikkien hilojen joukolla. Ongelma, joka esiintyi myös Hilbertin kuuluisalla listalla numerossa 18, johti lukuisten matemaatikkojen epätäydellisiin yrityksiin ja lopulta Halesin tietokoneavusteiseen todistukseen 1998 ([H]). Sittemmin argumentti on täysin formalisoitu ja edelleen massiivinen. Tiheys tällä hilalla on $\pi/\sqrt{18} \approx 0.74048$.

Kolmiulotteisen ratkaisun päälle lankesi kuitenkin pian odottava hiljaisuus. Todistustapa oli paitsi epäintuitiivinen, niin myös mitä ilmeisimmin mahdoton yleistettäväksi korkeampiin ulottuvuuksiin tapauskirjanpidon eksponentiaalinen räjähtämisen vuoksi. Minkäänlaista tiivistä vaihtoehtotodistusta ei Halesin Lauseelle ole löytynyt.

Viime vuonna kuitenkin repesi, kun ukrainalaissyntyinen Maryna Viazovska ratkaisi tapauksen $d = 8$ ([Vi]). Todistus, paitsi että se kytki pakkaukset tunnettuun matemaattiseen struktuuriin, modulimuotoihin, oli myös kompaktiudessaan (23 sivua) sellainen, että alan ekspertit kykenivät sulattelemaan sen nopeasti ja johtamaan hänen kanssaan todistuksen myös tapaukselle $d = 24$. Seuraavassa hiukan tarkemmin näistä spektakulaareista edistysaskeleista ja niiden taustasta.

1 Tiheysrajoja

Hila Λ on $\mathbf{R}^d$:n rangia d oleva diskreetti aliryhmä, toisin sanoen $\mathbf{R}^d$:n jonkin kannan kokonaisten lineaarikombnaatioiden joukko. Hilapakkaus on konfiguraatio, jonka jokaisessa hilapisteessä on maksimaalinen identtinen hyperpallo. Jaksollinen pakkaus on hyperpallokonfiguraatio, joka on invariantti jonkin hilan Λ kaikkien vektoreiden suhteen. Se on siis yleisempi konstruktio kuin hilapakkaus (yksi versus monta rataa hilasiirron alaisuudessa). Sellaisen pakkauksen tiheys voi olla mielivaltaisen lähellä optimitiheyttä, sillä

[1] Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

jaksollinen pakkaus voidaan muodostaa toistamalla halutun kokoista äärellistä optimipakkausta.

Hilapakkauksen tiheys (r-säteiset pallot B_r^d) on helposti laskettavissa, se on

$$\frac{B_r^d}{\mathrm{vol}\,(\mathbf{R}^d/\Lambda)} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)\mathrm{vol}\,(\mathbf{R}^d/\Lambda)}.$$

Alkeiskopin tilavuus $\mathrm{vol}(\mathbf{R}^d/\Lambda)$ taas lasketaan suoraan kantavektoreiden determinanttista.

Herman Minkowski oli kiinnostunut niin lukujen geometriasta kuin myös monista diskreetin geometrian ongelmista. Häneltä ja Edmund Hlawkalta on peräisin varhainen optimaalisten pallopakkausten tiheyden alaraja, $\zeta(d)/2^{(d-1)}$, jossa ζ on Riemannin zeta-funktio (olkoon $\zeta(1) = 1$). Elementaarilla argumentilla päästään jo aika liki. Olkoon meillä $\mathbf{R}^d$:n pakkaus, jossa ei ole yhtään uuden yksikköpallon mentävää ``reikää''. Jos nyt jokaisen pallon säde kaksinkertaistetaan, tulee pakkauksesta peite, sillä jos ei tulisi, niin olisi alkuperäisessä pakkauksessa ollut yksikköpallolle sopiva kolo. Koska tuplaus kasvattaa pallon volyymia tekijällä 2^d, saadaan miltei Minkowskin alaraja, 2^{-d}. Hämmästyttävintä tuloksessa on kuitenkin se, miten vaikea sitä on ollut parantaa. Tästä lisää tuonnempana.

Ylärajoja on kehitetty menestyksekkäämmin. Varhaisen läpimurron ns. lineaarisen ohjelmien rajojen parissa teki Philippe Delsarte 70-luvulla ([D]). Hän työskenteli Philipsin tutkimuslaboratoriossa koodien parissa, aihepiirin, johon pallopakkausten käytännöllinen merkitys on perinteisesti keskittynyt. Sittemmin hänen ideoitaan ovat kehittäneet monet muutkin. Seuraavassa menetelmän nykymuodosta Henry Cohnin ja Noam Elkiesin töiden pohjalta ([CE]).

Lineaaristen ohjelmien menetelmä on itse asiassa harmonista analyysiä $\mathbf{R}^d$:llä. Palautetaan ensi mieleen Fourier-muunnos

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x) e^{-i2\pi(x,y)} dx\ ,$$

jossa $(\cdot,\cdot)$ on $\mathbf{R}^d$:n standardi sisätulo ja tässä artikkelissa f on Schwartzin funktio eli äärettömän monta kertaa derivoituva ja kaikkien kertalukujen derivaattoineen toteuttaa asymptotiikan $f(x) = \mathcal{O}\left((1+|x|)^{-k}\right)$, $\forall k$. Tämä funktiojoukko on suljettu Fourier-muunnosten alaisuudessa, eikä liian rajoitettu käyttötarkoitukseemme.

Keskeistä roolia näyttelee Poissonin summakaava

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}^d/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y)\ ,$$

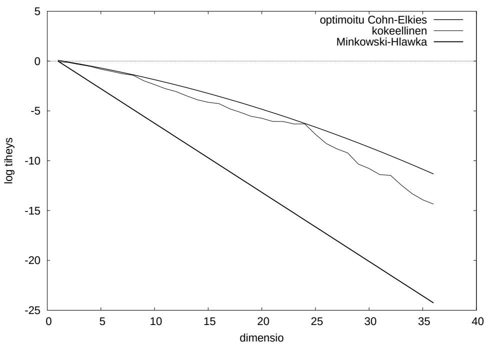
jossa skaalaustekijä on hilan alkeiskopin tilavuus ja Λ^* duaalihila $\{y \in \mathbf{R}^d \mid (x,y) \in \mathbf{Z}\ \forall x \in \Lambda\}$.

Lause 1 (Cohn ja Elkies, 2003). *Okoon $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ Schwartzin funktio ja $r > 0$ s.e. $f(0) = \hat{f}(0) > 0$, $\hat{f}(y) \geq 0\ \forall y \in \mathbf{R}^d$ ja $f(x) \leq 0$ kun $|x| \geq r$. Silloin $\mathbf{R}^d$:n pallojen pakkaustiheys on enintään $\mathrm{vol}(B_{r/2}^d)$.*

Sivumennen mainittakoon, että menetelmän nimi perustuu siihen, että yllä olevan r:n minimointiprobleema f:n avulla voidaan muuntaa ääretönulotteiseksi lineaariseksi optimointiongelmaksi.

Esittämättä todistuksen hikisimpiä detaljeja, hieman valaistusta perustapauksesta, hilapakkauksista. Jos hilan minimivektorin pituus on r, ovat pakkauksen pallot kooltaan $B_{r/2}^d$ eli tiheys on $\mathrm{vol}(B_{r/2}^d)/\mathrm{vol}(\mathbf{R}^d/\Lambda)$, jonka nimittäjä on siis osoitettava vähintään yksiköksi. Jos $f(x) \leq 0$ kun $|x| \geq r$, on Poissonin identiteetin vasen puoli korkeintaan $f(0)$. Toisaalta $\hat{f}(y) \geq 0\ \forall y$ implikoi, että identiteetin oikea puoli on vähintään $\hat{f}(0)/\mathrm{vol}(\mathbf{R}^d/\Lambda)$, joten sama alaraja pätee siis myös $f(0)$:lle. Koska $f(0) = \hat{f}(0) > 0$, saadaan $\mathrm{vol}(\mathbf{R}^d/\Lambda) \geq 1$ ja tulos seuraa. Periodisen pakkauksen tapaus argumentoidaan samaan tapaan, mutta teknisemmin, koska avaruus pitää pilkkoa lohkoihin, joissa kussakin edeltävää päättelya voidaan soveltaa.

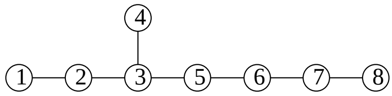
Lause on ratkaisevan tärkeä ja voi antaa jopa tarkan ylärajan, joka on äkkipäätään ällistyttävää, koska todistuksessahan heitetään surutta pois Poissonin summakaavan (vasemman puolen) kaikki termit yhtä lukuunottamatta! Sen hyöty lepääkin sen varassa, voidaanko hyvä f keksiä. Siis johtaa täsmälleen jostain dimensioriippuvista premisseistä tai arvioida numeerisesti mielivaltaisen tarkasti. Jälkimmäistä on tehty menestyksekkäästi ainakin dimensioon 36 asti ja tulosta voi arvioida seuraavasta vertailusta.



Ennenkuin menemme tarkemmin f:n etsintään, muutamia huomioita kuvan keskimmäisestä, empiirisesti löydettyjen parhaiden pakkausten graafista. Optimitiheys näyttää riippuvan omituisen vaihtelevasti dimensiosta. Se ei näyttäisi olevan edes monotoninen funktio: esimerkiksi paras tunnettu 24-ulotteinen pakkaus on tiheämpi kuin paras tunnettu 23-ulotteinen. Alimmissa dimensioissa ($d < 10$) voi suhteellisen menestyksekkäästi soveltaa intuitiota, jonka mukaan $\mathbf{R}^d$:n pakkauksen sopiva ``siivu''on hyvä pakkaus $\mathbf{R}^{d-1}$:ssa ja laminaarinen pakkaus, jossa pinotaan $\mathbf{R}^d$:n optimipakkauksia antaa hyvän pakkauksen $\mathbf{R}^{d+1}$:hen. Korkeammissa ulottuvuuksissa tämä johtaa harhaan.

Silmiinpistävää kuvaajassa ovat dimensiot 8 ja 24, joissa pakkaustiheydet ovat poikkeuksellisen korkeat ja se, että yläraja näyttää hipovan niitä. Paras mahdollinen Lauseen 1 mukainen optimoiva funktio tunnetaan nyt kun $d = 1, 8$ ja 24. Sellaisten funktioiden esille maanitteluun on uhrattu niin paljon energiaa, että niitä kutsutaan nykyään alan tutkijoiden piirissä ``maagisiksi funktioiksi''.

Dimensioissa 8 ja 24 on tarjolla hilat, joilla kummallakin on tavattoman rikkaat symmetriat: edellisessä tapauksessa juurihila E_8 ja jälkimmäisessä Leechin hila. Tarkastellaan hieman tarkemmin edellistä. E_8 määrittyy kantavektoreistaan $v_1, \dots, v_8 \in \mathbf{R}^8$. Niiden kaikkien pituus on $\sqrt{2}$ ja väliset sisätulot 0 tai -1. Suhteet paljastaa Dynkinin diagrammi: viereisten solmujen/vektoreiden välinen sisätulo on -1, muiden 0.



E_8 on kokonainen hila eli kaikkien sen vektorien väliset sisätulot ovat kokonaislukuja. Itse asiassa se on parillinen hila: jokaisen hilavektorin pituuden neliö on parillinen luku ja kaikkien hilapisteiden etäisyydet ovat muotoa $\sqrt{2k},\ k = 1, 2, \dots$ (ja jokainen näistä realisoituu!). Naapuripisteiden etäisyys on siten $\sqrt{2}$, joten hilapakkauksen tiheydeksi tulee

$$\frac{B^8_{1/\sqrt{2}}}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}^8/E_8)} = \frac{\pi^4}{384} \approx 0.25367\ ,$$

koska E_8 on vielä (pienellä laskulla) unimodulaarinen hila eli alkeiskopin tilavuus on 1. Hilan E_8:n symmetriaryhmä on suunnaton (astetta 696729600) ja se on myös oma duaalihilansa, ominaisuus, jota optimaalisuustodistus käyttää hyväksi. Leechin hilalla on vastaavia hyvin elegantteja symmetriaominaisuuksia, mutta niiden esittely jääköön viitteiden varaan.

Henry Cohn, Abhinav Kumar ja Stephen Miller ovat töissään viime vuosikymmenellä osoittaneet, että on löydettävissä miltei maaginen funktio, joka osoittaa E_8- ja Leech-hilapakkaukset korkeintaan 10^{-28} prosenttia huonommiksi kuin optimaalinen pakkaus dimensioissa 8 ja 24. Koska gaussin funktio säilyttää tyyppinsä Fourier-muunnoksessa, he ovat käyttäneet tutkimuksissaan usein Schwartzin muotoa $f(x) = p(|x|^2)e^{-\pi|x|^2}$, jossa p on polynomi. Radiaalisiin funktioihin rajoittuminen ei riskeeraa optimointia. Mutta esimerkiksi Leechin hilan tapauksessa paras numeerinen yläraja edellytti astetta 1606 olevan polynomin käyttöä.

Palautetaanpa vielä mieleen Lauseen 1 todistusstrategia. Jotta se antaisi mahdollisimman tiukan ylärajan, pitäisi Poisson-summista pudotettavien termien olla mahdollisimman pieniä, mieluiten nollia. Siten ideaalisesti funktion f tulisi hävitä joukolla $\Lambda \setminus \{0\}$ ja $\hat{f}$:n $\Lambda^* \setminus \{0\}$:lla. Edeltävän nojalla E_8:lla molempien funktioiden tulisi hävitä pisteissä $\sqrt{2k},\ k = 1, 2, \ldots$ ja Leechilla pisteissä $\sqrt{2k},\ k = 2, 3, \ldots$ Lisäksi f:n ensimmäisen juuren pitäisi olla yksinkertainen ja kaikkien muden kaksinkertaisia, $\hat{f}$:n kaikkien kaksinkertaisia. Pitäisi siis pystyä kontrolloimaan samanaikaisesti sekä funktiota, että sen Fourier-muunnosta äärettömän monessa pisteessä. Tämä ei ole helppoa - fyysikko saattaisi tokaista, että Heisenbergiin törmäsit.

Jos f ja $\hat{f}$ häviävät samoissa pisteissä, niin sen nojalla, että Fourier-muunnos on involuutio, voidaan huomata, että määrittelemällä $f_+ = (f + \hat{f})/2$ ja $f_- = (f - \hat{f})/2$ saadaan funktiot, jotka myöskin häviävät samoissa pisteissä, ja lisäksi $f = f_+ + f_-$, $\hat{f}_+ = f_+$ ja $\hat{f}_- = -f_-$, joten ongelmaa voi lähestyä ominaisarvoihin ± 1 liittyvien Fourier-ominaisfunktioiden kautta. Tämä tulee osoittautumaan ei-triviaaliksi huomioksi.

Approksimaatiotulokset osoittivat, että E_8 ja Leech ovat hilapakkausten parhaat annetuissa dimensioissa 8 ja 24. Vain jostain hämmästyttävästä oikusta ne eivät sitä olisi myös absoluuttisesti, kaikkien pakkausten joukolla. Mutta valitettavasti kvalitatiivinen karaterisointi maagiselle funktiolle jäi kaikissa töissä ennen viime vuotta vielä auki. Thomas Hales, joka hänkin pohdiskeli näitä funktioita Kepler-voittonsa jälkeen, totesi eräässä yhteydessä, että ``jonkun pitäisi tehdä Ramanujanit''. Tällä hän viittasi kuuluun intialaiseen lukuteoreetikkoon, jolla oli kyky taikoa kuin tyhjästä ratkaisuja hyvin syvällisiin ongelmiin. Niinpä niin - itse asiassa Ramanujan usein harjoitti

2 Modulaarista magiaa

Jokaiselle hilalle Λ voidaan määritellä analyyttinen theta sarja

$$\Theta_\Lambda(z) = \sum_{x \in \Lambda} e^{i\pi |x|^2 z}, \quad \Im z > 0 .$$

Koska termeissä oleva Gaussin funktio $e^{-\pi t |x|^2}$ Fourier-muuntuu muotoon $t^{-d/2} e^{-\pi |y|^2/t}$, voidaan Poissonin kaavalla ja valinnalla $z = it$ johtaa, kun $\Im z > 0$,

$$\begin{aligned} \Theta_\Lambda(z) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}^d/\Lambda)} \sum_{y \in \Lambda^*} t^{-d/2} e^{-\pi |y|^2/t} \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}^d/\Lambda)} \left(\frac{i}{z}\right)^{d/2} \Theta_{\Lambda^*}(-1/z). \end{aligned}$$

Jos nyt valitaan $\Lambda = E_8$, joka kuten muistetaan on duaalinsa ja lisäksi parillinen hila, saadaan edelleen

$$\Theta_{E_8}(-1/z) = z^4 \Theta_{E_8}(z)$$

ja

$$\Theta_{E_8}(z+1) = \Theta_{E_8}(z).$$

Vastaavat funktionaaliyhtälöt voidaan johtaa myös Leechin hilalla, tällöin monomikerroin on z^{12}. Kuvaukset $z \mapsto z+1$ ja $z \mapsto -1/z$ generoivat ylemmällä puolitasolla Möbiusryhmän, Moduliryhmän $PSL(2, \mathbf{Z})$ esityksen, jonka suhteen thetat ovat siis invariantteja. Sanotaan, että Θ_{E_8} ja Θ_{Leech} ovat *modulimuotoja painoin* 4 ja 12.

Toisena esimerkkinä modulimuodoista mainittakoon Eisensteinin sarjat (painolla $k = 4, 6, 8, \ldots$)

$$\frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{(mz+n)^k} .$$

Invarianssi inversion ja siirron suhteen seuraa sarjan uudelleenjärjestelystä. Myös painolla 2 voidaan määritellä Eisensteinin sarja, tosin teknisesti hiukan eri tavoin ja sen funktionaaliyhtälö on hiukan mutkikkaampi, joten se on ns. kvasimodulimuoto. Modulimuodot yleistyvat hyödyllisesti, mm. osamäärien kautta meromorfisiksi modulimuodoiksi ja sen mukaan sallitaanko napa äärettömyydessä vai ei. Yhteistä niille on hienot ja rikkaat symmetriat, kuten jo yllä-olevasta kenties jo aavistaa. Niiden monista oivallisista ominaisuuksista lisää monografioissa tai vaikkapa äskettäisessä Esa Vesalaisen artikkelissa, Arkimedes 4/2016. Ne ovat näytelleet merkittävää roolia mm. lukuteoriassa, koodausteoriassa ja nyt myös pakkauksissa. Mutta mikä kytkee modulimuodot himoittuihin optimaalisiin korkeaulotteisiin radiaalifunktioihin?

Funktion g Laplace-muunnos pisteessä $\pi|x|^2$ on tietenkin $f(x) = \int_0^\infty e^{-t\pi|x|^2} g(t)dt$. Edelleen, jos g on vaikkapa Schwartz-siisti, voidaan helposti johtaa

$$\hat{f}(y) = \int_0^\infty e^{-t\pi|y|^2} t^{d/2-2} g(1/t) dt \, .$$

Siten jos g toteuttaa riippuvuuden $g(t) = \pm t^{d/2-2} g(1/t)$, saadaan ratkaisut halutuille ominaisyhtälöille $\hat{f} = \pm f$. Funktionaaliyhtälökään ei näytä enää niin omituiselta, sillä jos φ on modulimuoto painolla k ja määritellään $g(t) = \varphi(it)$, saadaan (kun $z = it$): $g(1/t) = \varphi(-1/it) = \varphi(-1/z) = z^k \varphi(z) = i^k t^k \varphi(it) = i^k t^k g(t)$. Kenties tätä kautta voidaan Lauseen 1 edellyttämät ominaisuudet saada synnytettyä? Paino k näyttäisi kiinnittävän ominaisarvon merkin, mutta tämä ei osoittaudu merkittäväksi esteeksi. Lisäksi huomataan, että vasta toinen modulimuotojen funktionaaliyhtälöistä on pelissä; siirto-invarianssi tulee myös hyötykäyttöön.

Maryna Viazovskalta oli argumentaatiossaan paitsi taitoa, myös rohkeutta, sillä hän asetti tarpeeksi nollakohtia suoraan paikalleen käyttäen ominaisfunktioille yritettä

$$\sin^2\left(\frac{\pi|x|^2}{2}\right) \int_0^\infty e^{-\pi|x|^2 t} g(t) dt \, .$$

(Integraali suppenee vain kun $|x| > \sqrt{2}$, mutta koko lauseke on analyyttisesti jatkettavissa kiekkoon.) Sinin vuoksi lausekkeelle syntyy kaksinkertaiset nollakohdat pisteisiin $\sqrt{2k},\ k = 1, 2, \ldots$ ja nelinkertainen origoon. Ollakseen oikein, pitää integraalin kumota origon nollat ja toinen $\sqrt{2}$:n nollakohdista, eikä muita. Onko sellainen g, jonka Laplace-muunnoksella on sopivat navat, mahdollista valita?

Asia alkaa selviää, kun sinin kirjoittaa eksponentiaalimuodossa ja suorittaa muutamia tarkoin valikoituja polkuintegraaleja. Tämä on hänen tuloksensa ydin: ylläoleva esitys ja Laplace-muunnos implikoivat definiitit funktionaaliyhtälöt, jotka ovat lähellä edelläkuvattua modulimuotojen tyyppiä. Hänen tuloksensa on täysin eksplisiittinen, vaikkakin hieman tekninen: $g(t)_\pm = t^2 \phi(i/t) \pm \psi(it)$, jossa ϕ ja ψ ovat rationaalilausekkeita, edellinen Eisensteinin sarjoista painoilla 2,4 ja 6 ja jälkimmäinen $\Theta_{\mathbf{Z}}$:sta. ϕ ja ψ liittyvät vastaavasti positiiviseen ja negatiiviseen ominaisarvoon ja summalausekkeiden $g_\pm$ (jotka siis antavat joko f:n tai $\hat{f}$:n) merkit Lausetta 1 varten voidaan suhteellisen helposti varmistaa. Ergo

Lause 2 (Viazovska, 2016). *Avaruuden $\mathbf{R}^8$:n optimipakkaustiheys on $\pi^4/384$, ja se saavutetaan juurihilalla E_8.*

Leechin hilalla ei ole aivan samoja ominaisuuksia kuin E_8:lla, esimerkiksi sen symmetriaryhmää ei voi generoida heijatuksin, sillä hilasta on erikätiset versiot. Ylläolevan läpimurtotuloksen johdannainen (hieman mutkikkaammat kvasimodulimuodot antavat maagisen funktion) kehitettiin kuitenkin nopeasti.

Lause 3 (Cohn, Kumar, Miller, Radchenko, Viazovska, 2016). *Avaruuden $\mathbf{R}^{24}$:n optimipakkaustiheys on $\pi^{12}/12!$ ja se saavutetaan Leechin hilalla.*

Numeerisesti jälkimmäinen tiheys on noin 0.001929, konkretisoiden sitä, miten vaikeaa pakkaaminen on korkeissa ulottuvuuksissa. Toisaalta Minkowski-Hlawkan alaraja, joka on noin $1.2 \cdot 10^{-7}$, paljastaa sen, miten odottamattoman tiheä tämä pakkaus on!

Edelläolevaa pakkaustiheyskuvaa tiirailemalla voi alkaa epäillä, että jostain merkillistä syystä pallojen pakkaus onnistuu paremmin, jos avaruuden dimensio on jaollinen neljällä ja vielä tätäkin paremmin, jos dimensio on 8:n monikerta. Syytä tähän ei tunneta, mutta se tiedetään, että parillisia unimodulaarisia hiloja on olemassa vain jälkimmäisessä tapauksessa. Kun $d = 16$, tästä ei ole apua ainakaan tällä hetkellä, sillä lineaarisen ohjelmoinnin yläraja on suboptimaalinen. Kenties kehittelyssä olevat yleisemmät semilineaariset ohjelmat voivat avittaa asiassa.

Parillisten unimodulaaristen hilojen määrä räjähtää pian dimension 24 jälkeen ja niiden luokittelu on täysin auki. Ei tiedetä edes sitä onko niiden suuri määrä lupaavaa vai ei. Viazovskan tuloksen korkeampiulotteiset yleistykset ovat siten tällä hetkellä täysin spekulatiivisia.

Alhaisissa ulottuvuuksissa houkuttelevimmalta näyttää neliulotteinen tapaus, jossa D_4-hila antaa parhaan tunnetun pakkaustiheyden. Tämän dimension vetoa lisää myös se, että Oleg Musin todisti sen *suuteluvun* (kissing number, käännös tekijän) olevan 24. Tämä identtisten pallojen pakkaukseen likeisesti liittyvä luku tarkoittaa sitä, kuinka monta palloa voi asettaa ryppääseen siten, että ne kaikki hipaisevat keskuspalloa. Ainoat dimensiot, joissa vastaus tunnetaan ovat $1, 2, 3, 4, 8$ ja 24, joissa suuteluvut ovat vastaavasti $2, 6, 12, 24, 240$ ja 196560. Tässä vaiheessa lukijaa ei enää järkyttäne se, että nämä kaikki pomppivat esiin kertoimina modulimuotojen sarjakehitelmissä...

3 Suuri hajaannus

Optimipakkauksen ratkaiseminen dimensio tai pari kerrallaan on matemaattiselta kannalta perin turhauttavaa. Pitäisi keksiä joko menetelmä, joka yhtenäistää analyysin laajemmassa joukossa dimensioita ja jopa ratkaisee ne tai argumentti, miksi sellaista ei voi olla. Näitä kahta voinee pitää vastaavasti optimistisena ja pessimistisenä skenaariona, jota huonompi on vain minkäänlaisen skenaarion puuttuminen.

Edellä esitetty Cohn-Elkies-yläraja on paras tunnettu raja suhteellisen alhaisissa dimensioissa, mutta se ei sovellu asymptoottisen tuloksen johtamiseen. Delsarten uraauurtavat työt 70-luvulla inspiroivat kuitenkin myös muita, ns. pallokoodien kanssa askartelevia tutkijoita. Tätä kautta syntyi Kabatianskyn ja Levenhsteinin toimesta asymptoottinen yläraja pallopakkauksille

$$\rho_d \leq 2^{-(0.5990\ldots+o(1))d}\,.$$

Vasta äskettäin tätä on hieman parannettu (vakiotekijällä, Cohn ja Yufei Zhao, 2013).

Minkowskin alaraja, oleellisesti $2^{-(d-1)}$, vaikuttaa triviaalilta, mutta sen parantaminen on osoittautunut varsin haastavaksi (kuten tuloksen varsinainen todistaja, Edmund Hlawka, arveli). Ensimmäinen parannus tuli sodan jalkeen C. Rogersilta, sitten K. Ballilta: $\rho_d \geq 2(d-1)2^{-d}$. Voimassaoleva ennätys on muutaman vuoden takaa on Aksay Venkateshilta ([Ve]):

$$\rho_d^{(1)} \geq \frac{65963\,d}{2^d} \qquad \text{ja} \qquad \rho_d^{(2)} \geq \frac{d\log\log d}{2^d}\,.$$

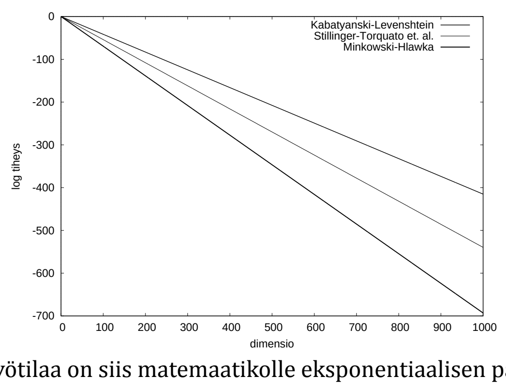
Raja $\rho^{(1)}$ pätee riittävän korkeissa dimensioissa ja $\rho^{(2)}$ taasen äärettömässä määrässä dimensioita. Venkateshin menetelmä perustuu alimäärättyyn, satunnaistettuun hilakokoelmaan, jota sitten säädetään siten, että minimivektorin pituus maksimoituu. Hän vaikuttaa vakuuttuneelta siitä, että hilojen joukolla Minkowskin rajaa voi parantaa korkeintaan polynomiaalisesti.

Optimitiheyden ylä- ja alarajan välinen juopa on askarruttanut lukuisia fysiikan ja kemian tutkijoita, mukaanlukien Princetonin F. Stillingeria ja S. Torquatoa. Koska hilapakkausten asymptotiikka näyttää niin depressiiviseltä, ovat he ryhmineen argumentoineet useammalla eri tilastollisen mekaniikan menetelmällä satunnaispakkausten asymptotiikkaa. Ns. dekorrelaatiohypoteesin nojalla he esittävät, että vain parikorrelaatiot huomioiden voidaan johtaa tiheyden asymptoottinen alaraja ([SST])

$$\rho_d \geq 2^{(3/2-1/(2\log 2))d} \approx 2^{-0.77865d}\,.$$

Menetelmä on eräänlainen Lauseen 1 argumentin duaali, josta syystä raja jää Cohn-Elkiesin ylärajan alle. Samalla (matemaattisesti puutteellisella) tavalla he johtavat myös suuteluvun alarajan $2^{0.22134d}$.

Tiheysrajat näyttävät tällä hetkellä siis seuraavanlaisilta (Venkateshin tuloksia on mahdoton piirtää, mutta log-plotissa ne hipoisivat Minkowskia).



Työtilaa on siis matemaatikolle eksponentiaalisen paljon! Stillinger ja Torquato maalaavat suuren hajaannuksen perusteella mahdollisia skenaariota:

1. Heidän dekorrelaatioperiaatteensa pätee kaikille suurille d, optimipakkaus on satunnainen ja heidän alarajansa on itseasiassa optimaalinen tiheys (joten Kabatiansky-Levenhstein on auttamattoman väljä).

2. On olemassa ääretön osajono dimensioita, joissa heidän käyttämänsä periaate ei toimi ja hilapakkaus onkin poikkeuksellisen hyvä, kenties Cohn-Elkiesin rajan saavuttava. Tämä mahdollisuus on otettava vakavasti, koska dimensioiden 8 ja 24 tapaisia ihmeitä, parillisia unimodulaarisia hiloja, joilla pakkaus sujuu hyvin mallikkaasti, voi esiintyä myös korkeissa ulottuvuuksissa.

3. Niin ikään on mahdollista, että on olemassa jopa alati tihenevä osajono dimensioita, joissa dekorrelaatio-argumentointi ei päde, jolloin sen merkitys asymptotiikan selvittämisessä on toissijainen. Tällöin optimipakkaus ei useimmissa ulottuvuuksissa olisikaan välttämättä satunnainen.

Matemaattiselta kannalta asymptotiikan tilanne on eriskummallinen. Symmetria on aina ollut matematiikassa hyvin korkeassa kurssissa, se on ''oikean''matemaattisen struktuurin tunnusmerkki. Tällä hetkellä me emme kuitenkaan tunne mitään argumenttia, miksi symmetrisimman mahdollisen kappaleen, hyperpallon, korkeaulotteisella optimipakkauksella tulisi olla mitään symmetrioita. Aivan yhtä hyvin se voi olla satunnainen rykelmä. Valonpilkahduksena on vain se, etta kaikkissa tähän mennessä todistetuissa dimensioissa symmetrinen optimikonfiguraatio on lopulta löytynyt.

4 Vähemmän ympäripyöreät päätössanat

Matematiikko lienisi perin onnellinen saatuaan edes pallot haltuunsa, mutta fyysikko tai kemisti tuskin siihen tyytyisi. Jälkimmäisten aloitteesta onkin viime vuosina edistytty myös mutkikkaampien kolmiulotteisten kappaleiden pakkausten karakterisoinnissa. Tästä muutama sana lopuksi.

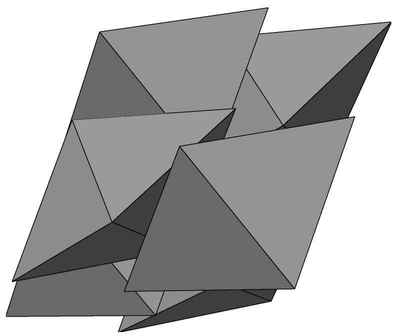
Stanislav Ulamin konjektuuri väittää, että $\mathbf{R}^3$:ssa huonoiten kaikista konvekseista kappaleista pakkautuu pallo. Pitkään ei edes tiedetty miten Platonin säännölliset monitahokkaat pakkautuvat verrattuna palloon, joka jättää noin 26% tyhjää. Näistä viidestä pisimpään oli auki tetraedri, jonka optimitiheys pysytteli vuosia epäilyttävän kehnolla tasolla (tetraedrien pakkaus rassasi myös Hilbertiä, siksi se oli osa hänen probleemaansa numero 18). Lopulta tietokoneiden ja niiden ohjelmien kehityttyä riittävälle tasolle alkoi simulaatiokilpa. Voitiin laittaa muutama tetraedri poukkoilemaan alati kutistuvaan alkeiskoppiin ja antaa koodin etsiä lokaalia optimikonfiguraatiota. Elizabeth Chen ehti ensimmäisenä yli pallo-optimin ([Ch]). Sittemmin tetraederien pakkaustiheys on noussut varsin respektaabelille tasolle, noin 0.8563:een, joka saattaa hyvinkin olla maksimi (yllättävän elegantisti kaksi tetraedridimeeriä alkeiskopissa, kuva alla).

Jeffrey Lagarias ja Chuanming Zong ([LZ]) ovat muotoilleet toisen ``Ulam-henkisen''kysymyksen: Pakkautuuko säännöllinen tetraedri kaikista tetraedreista huonoiten? On helppo nähdä, että sopivalla vinotetraedrilla ja sen kongruenteilla kopioilla voi osittaa kuution ja siten koko $\mathbf{R}^3$:n. Avoinna on myös jatkokysymys: Mitkä tetraedrit osittavat avaruuden? Ainakin viisi erilaista tunnetaan.

Tetraedrin suuteluku on huikea, varmuudella ainakin 56 ([LZ]). Muistetaan, että samaisen $\mathbf{R}^3$:n pallolla tämä on 12. On helppo nahdä, että vinotetraederin suuteluku voi olla mielivaltaisen korkea. Niinpä onkin ihmetelty, onko juuri säännöllisellä tetraedrillä sittenkin alhaisin suuteluku?

Monitahokkaat eivät siis ratkaisseet Ulamin konjektuuria negatiiviseen. Paras väitettä tukeva tulos lienee Yoav Kallusin: jokainen pallon pieni, keskisesti symmetrinen perturbaatio pakkautuu paremmin kuin pallo itse. Avainfraasi tässä on ``keskisesti symmetrinen''. Jos kappaleelta puuttuu tämä ominaisuus - kuten vaikkapa tetraedrilta - elämä usein hankaloituu ja väljyyttä jää.

Neli- ja korkeampiulotteista Ulamin konjektuuria ei ole formuloitu. Kaksiulotteisen ratkaisua (vihje: negatiiviseen) lukija voikin hahmotella ilokseen vaikkapa kokousmuistion marginaaliin.



5 Viitteitä

[Ch] Chen, E.: A Dense Packing of Regular Tetrahedra, *Discr. & Comp. Geom.*. 40 (2) (2008): 214-40.

[Co] Cohn, H.: A conceptual breakthrough in sphere packing, *Notices of AMS*, **64**, (2017), 102-15.

[CE] Cohn, H., Elkies, N.: New upper bounds on sphere packings I, *Ann. of Math.*, **157**, (2003), 689-714.

[CKMRV] Cohn, H., Kumar, A., Miller, S., Radchenko, D, Viazovska, M.: The sphere packing problem in dimension 24, arXiv:1603.06518, julk. *Ann. of Math.*

[D] Delsarte, P.: Bounds fo unrestricted codes, by linear programming, *Phillips Res. Rep.*, **27**, (1972), 272-89.

[H] Hales, T.: A proof of the Kepler conjecture, *Ann. of Math.*, **162**, (2005), 1065-1185.

[KL] Kabatyanski, G, Levenshtein, V.: Bounds for packings on a sphere and in space, *Probl. Info. Trans.*, **14**, (1978), no. 1, 1-17.

[LZ] Lagarias, J., Zong, C.: Mysteries in packing regular tetrahedra, *Notices of AMS*, **59** (2013), 1540-9.

[SST] Scardiccio, A., Stillinger, F., Torquato, S.: Estimates of the optimal density of sphere packings in high dimensions, *J. of Math. Phys.*, **49**, (2008).

[Ve] Venkatesh, A.: A note on sphere packings on high dimensions, *Int. Math. Res. Notices*, no. 7, (2013), 1628-42.

[Vi] Viazovska, M.: The sphere packing problem in dimension 8, arXiv:1603.04246, julk. *Ann. of Math.*