

KAAOKSEN JÄRJESTYKSESTÄ

KARI ELORANTA

Johdanto

Tämän artikkelin tarkoituksena on kuvailla dynaamisten järjestelmien matemaattisen analysoinnin yleispiirteitä korostaen erityisesti eräitä viimeaikaisia tuloksia, joiden kautta ala on saamassa teorialle ominaista yhtenäistä muotoa. Tässä tarkastelussa käytetään sileän dynamiikan, ergodisen teorian ja todennäköisyyslaskennan metodeja. Pyrin formuloidaan peruskäsitteet täsmällisesti ja esittämään eräitä keskeisiä tuloksia, mutta pääpaino on näiden takaa paljastuvien periaatteiden valottamisessa. Esityksen havainnollistamiseksi kuvaan useita erilaisia konkreettisia dynaamisia järjestelmiä, jotka on teorian puitteissa pystytty analysoimaan pitkälle. Dynaamisten järjestelmien äärellisen aikahorisontin estimointi- ja säätöteorioihin en tässä yhteydessä puutu. Artikkelin lopun viitteistä löytää kiinnostunut lukija esitettyjen tulosten todistukset ja ehdotuksia jatkolukemiseksi.

1. Dynaaminen järjestelmä abstraktisti ja konkreettisesti

Olkoon $(X, \mathcal{B})$ mitallinen avaruus. Tällöin X on joukko ja $\mathcal{B}$ sen σ -algebra, eli ei-tyhjä kaikkien osajoukkojen kokoelma, joka on suljettu komplementin ja numeroituvan unionin suhteen. Jos tällä avaruudella on määritelty mitta μ , jonka kokonaismassa on yksi, on kolmikko $(X, \mathcal{B}, \mu)$ todennäköisyysavaruus.

Jos mitallisella injektiivisellä kuvauksella $T : X \rightarrow X$ on mitallinen käänteiskuvaus ja se toteuttaa ehdon $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ $\mathcal{B}$:n jokaisella joukolla B , on T mitan μ säilyttävä kuvaus.

Määritelmä: $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ on abstrakti dynaaminen järjestelmä.

Dynaamisten järjestelmien tutkimus on perusmuodossaan (silloin kun systeemi on autonominen) kuvauksen T iteraatioiden tarkastelua, eli siis ryhmän $\mathbb{Z}$ toiminnan kuvausta. Tavallisesti ollaan kiinnostuneita iteraation asymptoottisista ominaisuuksista, ts. systeemin pitkän aikavälin evoluution hallitsevista piirteistä. Jos systeemi on jatkuva-

aikainen, voidaan myös tarkastella $\mathbf{R}$ -toimintaa, eli ryhmää $\{T_t \mid t \in \mathbf{R}\}$, jolloin vastaava dynaaminen järjestelmä on *virtaus*. Joissakin tapauksissa näistä ryhmäominaisuuksista on syytä tinkiä ja määritellä dynaaminen järjestelmä ilman injektiiivisyysvaatimusta. Myös ns. *dissipatiivisia* systeemejä on mahdollista tarkastella tässä formalismissa. Näille on tunnusomaista se, että toiminta keskittyy asympotoottisesti avaruuden osajoukolle X' , *attraktorille*. Jos T :n rajoittuma X' :lle säilyttää mitan, voidaan määritellä dynaaminen järjestelmä. Huomattakoon myös, että attraktori on usein fraktaali, ja kääntäen, moni fraktaali indusoi dynaamisen järjestelmän, jonka analysoiminen on välttämätöntä fraktaalien geometrian ymmärtämiseksi.

Jos X :llä on vain kuvattu mittastruktuuri, on ko. dynaamisen järjestelmän tutkimus *ergoditeoriaa*. Jos X :llä on myös topologinen struktuuri ja T on homeomorfismi, voidaan iteraatiota tutkia (mitan mahdollisesti unohtaen) *topologisenä dynamiikkana*. Mikäli X on peräti differentioituva monisto ja T sen diffeomorfismi, on kysymys differentioituvasta eli *sileästä dynamiikasta*.

Esimerkki 1 (kierto): $X = [0, 1)$, $Tx = x + \alpha \pmod{1}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ ja μ on Lebesguen mitta. Tämä on tietenkin erikoistapaus *kierrosta* kompaktilla ryhmällä, jolloin μ on Haarin mitta.

Esimerkki 2 (stationaarinen stokastinen prosessi): Olkoon $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ todennäköisyysavaruus ja $\{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ reaaliarvoisia, mitallisia funktioita Ω :lla (satunnaismuuttujia). Jos jokaiselle Borelin joukolle $A_i \in \mathcal{A}$ pätee

$$P\{\omega \mid X_{n_i}(\omega) \in A_i, i = 1, \dots, n\} = P\{\omega \mid X_{n_i+k}(\omega) \in A_i, i = 1, \dots, n\} \quad \forall k,$$

on jono $\{X_n\}$ *stationaarinen*. Ehto siis yksinkertaisesti vaatii systeemin tilastollisten ominaisuuksien olevan ajasta riippumattomat. Olkoon $\phi : \Omega \rightarrow X = \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ (numeroituvasti äärettömien reaaliarvojen jonojen avaruus) sellainen, että $(\phi\omega)_n = X_n(\omega)$, ja olkoon $\mu(B) = P(\phi^{-1}(B))$ kaikille X :n osajoukoille. μ on mahdollista laajentaa täydelle X :n Borelin σ -algebralle, jota kutsuttakoon jälleen $\mathcal{B}$:ksi. Jos nyt määritellään siirros jonoavaruudella X asettamalla $(\sigma x)_n = x_{n+1}$, säilyttää σ stationaarisuuden nojalla μ :n ja $(X, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ on dynaaminen järjestelmä.

Esimerkki 3 (sileä dynaaminen järjestelmä): Olkoon $\{(q_i, p_i), i = 1, \dots, n\}$ hiukkasen koordinaatit ja liikemäärä $\mathbf{R}^n$:ssä. Jos hiukkanen toteuttaa Hamiltonin dynamiikan, on olemassa funktio $H : \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}$ (joka on tyypillisesti kineettisen ja potentiaalienergian summa) ja riippuvuudet

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n.$$

Tavallisten differentiaaliyhtälöiden teorian perusteella voidaan näistä johtaa (puoli)ryhmä T_t faasiavaruudella $\mathbf{R}^{2n}$. Kiinnittämällä kokonaisenergia H voidaan liike useissa tapauksissa rajoittaa kompaktille monistolle, jolla voidaan edelleen määritellä invariantti (Liouvillen) mitta, ja siten määritellä virtaus. Tyypillisiä esimerkkejä ovat *geodeettinen virtaus* (X on kompakti reunaton Riemannin monisto ja $H = \frac{1}{2}\|p\|^2$) ja sen singulaari yleistys, *biljardi* (monistolla on reuna).

Näistä esimerkeistä toivottavasti jo käy ilmi, että dynaamisina järjestelminä voidaan tarkastella mitä erilaisimpia systeemejä. Teorian kehittämisen kannalta on yksittäisen dynaamisen systeemin analysoinnin ja toisaalta yleisempien systeemityyppien kvalitatiivisten ominaisuuksien selvittämisen välinen vuorovaikutus mitä ratkaisevin. Osoittautuu, että juuri ergoditeorian puitteissa on mahdollista luokitella abstrakteja dynaamisia järjestelmiä riippumatta näistä erilaisista realisaatioista.

2. Sekoituksen hierarkia

Seuraavassa tarkastelemme muutamia tärkeitä abstraktien dynaamisten järjestelmien luokkia, jotka laajimmasta suppeimpaan muodostavat hierarkian ja samalla toimivat eräänlaisena sekoituksen tai satunnaisuuden asteikkona.

1. T on *ergodinen*, jos ainoat invariantit joukot ovat nolla- ja täysmitalliset mitan μ mielessä. Intuitiivisesti antoisampi on kuitenkin ekvivalentti määritelmä: jokaiselle $A, B \in \mathcal{B}$ pätee

$$(2.1) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B) \longrightarrow \mu(A)\mu(B),$$

ts. T sekoittaa joukon A avaruuteen X niin tasaisesti, että Cesaron keskiarvo suppenee (odotettuun arvoon). Seuraus tästä on tietenkin Birkhoffin ergodilause, jonka mukaan jokaiselle $f \in L^1(\mu)$ pätee

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \longrightarrow \int_X f d\mu \quad \mu\text{-m.k.}$$

Malliksi ergodisesta kuvauksesta käy esimerkin 1 irrationaalinen kierto. Jo tästä esimerkistä on helppo nähdä, että ergodinen kuvaus voi olla melko 'jäykkä'; mielivaltainen alkujakautuma ei iteraatiossa välttämättä konvergoi invarianttiin mittaan.

2. Jos ehdon (2.1) sijasta kuvaus T täyttää ehdon

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \mu(T^{-i}A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \right| \longrightarrow 0,$$

kutsutaan sitä *heikosti sekoittavaksi*. Selvästikin on kyse ergodisten kuvausten aliluokasta, mutta kuinka pienestä? Jos $\tau(X)$ on kaikkien todennäköisyysavaruuden $(X, \mathcal{B}, \mu)$ kääntyvien mitansäilyttävien kuvausten joukko, on heikosti sekoittavien kuvausten osajoukko heikon operaattoritopologian suhteen ensimmäistä kategorialla olevan joukon komplementti $\tau(X)$:ssä. Tässä mielessä ne ovat siis geneerisiä. Lisäksi tiedetään, että kuvaukset, jotka ovat *vahvasti sekoittavia*, eli täyttävät asymptoottisen riippumattomuusehdon

$$(2.2) \quad \mu(T^{-i}A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B),$$

ovat ensimmäistä kategorialla tässä mielessä. Esimerkin 1 kierto ei ole millekään α :lle heikosti sekoittava.

3. Vahvasti sekoittavien kuvausten aliluokkia on määritelty lukuisia lähinnä asettamalla ehdon (2.2) konvergenssivauhdille lisäehtoja. Kvalitatiivisessa mielessä seuraava mielenkiintoinen aliluokka on kuitenkin ns. Kolmogorovin eli K-automorfismit. Näitä vastaavat dynaamiset järjestelmät toteuttavat ns. 0-1-lain, eli niiden kaikki asymptoottiset tapahtumat ovat triviaaleja. Muodollisesti määritelmä vaatii, että on olemassa ali- σ -algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, jolle pätee

$$\mathcal{A} \subset T\mathcal{A}, \quad \bigvee_{i=-\infty}^{\infty} T^i\mathcal{A} = \mathcal{B}, \quad \bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}.$$

($\alpha \vee \beta$ on σ -algebra, joka sisältää kaikki joukot $A \cap B$, jossa $A \in \alpha$ ja $B \in \beta$.) Nämä ovat tämän hierarkian ensimmäiset aidosti ennustettavat järjestelmät: vaikka systeemin $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, jossa T on K-automorfismi, koko historia olisi tunnettu, ei seuraavaa tilaa voida varmuudella tietää. K-automorfismilla on siis aina 'satunnaiskomponentti', vaikka se olisikin täysin deterministisesti määritelty. Siksi K-automorfismien tutkimus on erittäin tärkeää kaoottisten järjestelmien kannalta. Vaikkei jälkimmäisille olekaan yleisesti hyväksyttyä määritelmää, näyttää siltä, että esimerkiksi sileille kaoottisille systeemeille trajektorien välinen eksponentiaalinen divergoituvuus on tyypillinen ominaisuus. Tämä on formuloitavissa ns. Ljapunovin eksponenttien avulla, jotka ovat ominaisarvojen logaritmin yleistys epälineaarisille järjestelmille. Toisaalta ns. Pesinin kaavan tyyppisten tulosten nojalla tiedetään, että positiivisten Ljapunovin eksponenttien olemassaolo implikoi positiivisen *entropian*. Tämä kuvauksen T keskimääräisen hajeen tai sekoituksen mitta, joka on Shannonin koodusteoriaan alun perin tuoman entropiakäsitteen yleistys, on K-automorfismeille aina positiivinen (toisin kuin esimerkiksi vahvasti sekoittaville kuvauksille, jotka voivat olla nolla-entropiaisia eli deterministisiä). Siten K-automorfismit tulevat luonnollisesti esille juuri kaoottisen sileän dynamiikan tutkimuksessa.

4. Olkoon tapahtuma-avaruus esimerkissä 2 reaaliakselin sijasta yleinen mitta-avaruus M ja olkoot satunnaismuuttujat riippumattomia (jolloin

ne toteuttavat Kolmogorovin 0-1-lain, eli systeemi on K). Silloin mitta μ on yksinkertaisesti tulomitta M^Z -lla. Tällöin kuvaus σ on Bernoullin siirros. Jos jatkuva-aikainen dynaaminen järjestelmä $(X, \mathcal{B}, \mu, T_1)$ on sellainen, että T_1 on Bernoullin siirros, kutsutaan sitä Bernoullin virtaukseksi. Osoittautuu, että se on aikaskaalausta vaille yksikäsitteinen mittaisomorfian mielessä. Koska Bernoullin siirrostensa ja virtausten teorit yhtyvät suurelta osin, kutsumme niitä jatkossa Bernoullin systeemeiksi. Tämä luokka on dynaamisten järjestelmien tutkimuksen kannalta hyvin keskeinen, sillä sen jäsenet ovat maksimaalisesti sekoittavia. Silti niiden ominaisuudet ovat sangen hyvin tunnetut, koska keskeisen isomorfiaprobleeman on ratkaissut amerikkalainen D. S. Ornstein. Kaksi dynaamista järjestelmää, $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i, T_i)$ $i = 1$ ja 2 , ovat isomorfisia, jos on olemassa mitansäilyttävä, kääntyvä konjugaatio $\phi: X'_1 \rightarrow X'_2$, $\phi T_1(x) = T_2 \phi(x) \forall x \in X'_1$, jossa X'_i on täysmittallinen invariantti osajoukko X_i :stä. Osoittautuu, että entropia on tälle luokalle täydellinen isomorfiainvariantti, eli systeemit ovat isomorfisia, jos ja vain jos niillä on sama (positiivinen, mahdollisesti ääretön) entropia. Kiinnostavaa (ja turhauttavaa) on se, että isomorfisille systeemeille on yleensä suuri joukko isomorfoita, mutta jo yhdenkin konstruoiminen on sangen vaikeaa. Isomorfiatulokset ovat kuitenkin dynaamisten järjestelmien fysikaalisesti mielekkään luokittelun välttämätön edellytys. Tämä johtuu siitä, että systeemejä on tarkoituksenmukaista luokitella vain isomorfiaan asti, sillä isomorfisia systeemejä ei voi tilastollisin menetelmin erottaa toisistaan (ϕ :n mielessä ekvivalentit tapahtumat ovat yhtä todennäköisiä kummassakin systeemissä). Mainittakoon myös, että K-automorfismien joukolla on osoitettu olevan ylinumeroituvasti ei-isomorfisia samaentropiaisia kuvauksia, eikä mitään menestyksestä invarianttia tälle luokalle ole pystytty esittämään.

Luokat 1-4 ovat siis monotoninen jono aliluokkia, mutta silti Bernoullin systeemien joukko on kaukana triviaalista. Monien dynaamisten järjestelmien on osoitettu olevan Bernoullin siirroksia tai virtauksia. Esityksen konkretisoimiseksi seuraavassa muutamia esimerkkejä:

- Ergodiset automorfismit n -toruksella tai yleisemmin kompaktilla Abelin ryhmällä. Jos siten tällainen automorfismi on ollenkaan sekoittava (täyttää minimaalisen ominaisarvojen irrationaalisuusehdon), on se maksimaalisesti sekoittava.
- Topologisesti sekoittavat Axiom A -attraktorit. Tämä luokka sisältää mm. lähes kaikki Anosovin virtaukset hyperbolisten virtausten tyypillisinä edustajina. Näiden puoliryhmä (tai diffeomorfismi) hajottaa Riemannin moniston jokaisen pisteen tangenttikimppun stabiiliin ja epästabiiliin komponenttiin. Standardiesimerkki näistä systeemeistä on geodeettinen virtaus Riemannin monistolla, jolla on negatiivinen kaarevuus.

- Biljardivirtaus eräillä Riemannin monistoilla. Geodeettinen viiva heijastuu tällöin reunasta kuten valonsäde. Oleellista bernoullisuudelle näyttää olevan se, että moniston Riemannin (Gaussin) kaarevuus tai reunan geodeettinen kaarevuus on negatiivinen riittävän suurella joukolla, josta seuraa edellistä mutkikkaamman hyperbolisen rakenteen olemassaolo. Kaoottisen dynamiikan geometrisesti yksinkertaisin edustaja lienee juuri eräs tällainen biljardi; suoraviivainen liike tasoneliössä, josta on poistettu kiekko sisältä.
- Lorenzin attraktori
- Eräät ei-kääntyvät intervallikuvaukset, esimerkiksi $x \mapsto \beta x \pmod{1}$, kun $\beta > 1$, $x \mapsto \alpha x(1-x)$ kun kuvauksella on absoluuttisesti jatkuva invariantti mitta, sekä ketjumurtolukukuvaus.
- Jaksottomat, redusoitumattomat Markovin siirrokset ts. Markovin ketjun indusoiman siirroksen määrittelemä kuvaus. Siten jos Markovin ketju täyttää ns. Doeblinin ehdon, on se bernoulli. Tulos yleistyy mm. kompakteilla monistoilla määritellyille ei-degeneroituville diffuusioprosesseille.
- Useat erilaiset äärettömät, vuorovaikutteiset hiukkassysteemit.

Vaikka yksittäisten järjestelmien bernoullisuuden osoittaminen on edelleen haastava ja tärkeä tehtävä, joka selvittää käsitteen luonnetta, on myös olemassa eräitä yleistuloksia, jotka valaisevat koko luokan merkitystä sekoittavien systeemien ytimessä. Nolla- ja positiivientropiaisten järjestelmien välinen demarkaatiolinja tulee erityisen selväksi tuloksesta, jonka mukaan *dynaamisella järjestelmällä on positiivinen entropia jos, ja vain jos sillä on Bernoullin tekijä* (alkuperäinen ja tekijäkuvaus konjugoituvat, mutta isomorfian edellyttämää konjugaation kääntyvyyttä ei vaadita, tyypillisesti kuvaus on projektio). Itse asiassa on olemassa suuri joukko dynaamisia järjestelmiä (esimerkiksi Axiom A), joille tämä tuloesitys on yksinkertaisin mahdollinen, eli systeemi on Bernoullin systeemin ja kierron suora tulo. Siten positiivientropiaisella dynaamisella järjestelmällä on aina tekijä, jota ei voida ennustaa millään menetelmällä, vaikka koko systeemin menneisyys olisi tunnettu. Tietenkin tämä samalla korostaa Bernoullin systeemien keskeistä asemaa kaikkien satunnaisprosessien alkutekijänä.

3. α -kongruenssi

Isomorfia edellä kuvatussa mielessä takaa vain systeemien todennäköisyysteoreettisen rakenteen yhtäläisyyden. Siten kaksi isomorfista Ber-

noullin systeemiä voi realisoitua täysin eri tavoin. Mikäli halutaan isomorfian säilyttävän myös systeemien topologisia ja metrisiä ominaisuuksia, on etsittävä isomorfoiden kokoelmasta 'parhaita' isomorfoita. Tässä mallisesti ottaen vaadimme silloin seuraavaa:

Määritelmä: Kaksi Bernoullin systeemiä $(X, \mathcal{B}, \mu_i, T_i)$, jotka on määritelty samalla kompaktilla metrisellä avaruudella (X, d) , ovat α -kongruentteja, jos ne ovat isomorfisia ja isomorfia siirtää avaruuden X pisteitä korkeintaan etäisyyden α paitsi joukolla, jonka (invariantti) mitta on korkeintaan α (eli siis $\mu(\{x \in X \mid d(x, \phi(x)) > \alpha\}) \leq \alpha$).

Koska Bernoullin systeemit ovat ergodisia, tämä määritelmä yhdessä Birkhoffin ergodilauseen kanssa implikoi sen, että α -kongruenttien systeemien trajektorit voidaan asettaa injektiiviseen vastaavuuteen siten, että melkein kaikki täten muodostetut trajektoriparit ovat korkeintaan etäisyydellä α toisistaan kaikkina ajanhetkinä lukuun ottamatta aikajoukkoa, jonka tiheys on korkeintaan α . Tämä muoto on taasen konkrétoitavissa seuraavasti: jos α -kongruentteja systeemejä tarkkailee havainnoitsija, jonka mittausvirhe metriikan d mielessä on karkeampi kuin α ja joka tekee satunnaista mittausvirhettä vähintään todennäköisyydellä α , ei hän voi millään keinoin erottaa systeemejä toisistaan (riippumatta siitä, miten kauan mittauksia tehdään).

Mikäli lukija on perillä ns. rakenteellisen stabiilisuuden teoriasta, saat-
taa edellä oleva kuvaus vaikuttaa jotenkin tutulta. Tässä teoriassa pyritään säilyttämään sileän systeemin trajektorien topologinen ja geometrinen rakenne häiriöissä ja vaaditaan, että (alkuperäisen ja häirityn systeemin yhteisellä) monistolla on määritelty konjugoiva homeomorfismi, joka on lähellä identiteettiä. Tämä funktio kuvaa alkuperäiset trajektorit häiritylle trajektoreille säilyttäen ajan suunnan, mutta aikaskaalaa pisteestä toiseen muuttaen. Yleensä tämä homeomorfismi on kaukana isomorfiasta eikä siten säilytä systeemien mittastruktuuria. Tämä taas säilyy α -kongruenssissa, ja lisäksi konjugatio on metrisesti oikea paitsi (mitaltaan) pienellä joukolla. Samoin isomorfia yleensä säilyttää geometrisiä ominaisuuksia, jos kohta konjugoitavat systeemit voivat olla topologisesti erilaiset. α -kongruenssissa vältytään myös edellä mainitulta aikaskaalauksen patologialta – toiselle systeemeistä vaaditaan vain positiivinen, affiini aikaskaalaus entropioiden tasaamiseksi. Näiden kahden stabiilisuuskäsitteen samankaltaisuuden johdosta α -kongruentteja häiriöitä on alettu kutsua *tilastollisesti stabiileiksi* häiriöiksi.

Kuten jo aiemmin on todettu, yleensä kahden samaentropiaisen Bernoullin systeemin välillä on suuri joukko isomorfoita. Siten itse isomorfian osoittamisen (entropian laskennan) jälkeen ei ole vielä selvää, miten hyviä isomorfoita on löydettävissä. Eräitä tuloksia on kuitenkin jo ehditty saada:

- Topologisesti sekoittavat C^2 -Axiom A -attraktorit ovat α -kongruentteja C^1 -metriikassa riittävän pienten häiriöiden kanssa. Tämä on perustavaa laatua oleva tulos, sillä rakenteellinen stabiilisuus on oleellisesti vain Axiom A -luokkaan rajoittunut. Toisaalta C^2 -Axiom A on sen suurin aliluokka, jolle α -kongruenssi on mielekäästä määritellä, sillä tämän joukon ulkopuolella systeemeillä ei yleensä enää ole kanonista invarianttia (Sinai-Bowen-Ruelle) mitata. Voidaan siis sanoa, että fysikaaliselta kannalta (kun esimerkiksi rajoitutaan termodynaamisessa tasapainossa oleviin prosesseihin, ovat mittaukset aina invariantista mitasta riippuvia) kaikki rakenteellisesti stabiilit systeemit ovat tilastollisesti stabiilien systeemien aliluokka.
- Eräät dispersiiviset biljardivirtaukset, jolloin häiriö on joko biljardi tai geodeettinen virtaus. Näiden mielenkiintoisuus piilee mm. siinä, että tällä luokalla voi hyvin konkreettisesti formuloida bernoullisuuden ja α -kongruenssin ehtoja kuten myös esittää järjestelmiä, jotka ovat tilastollisesti, mutta eivät rakenteellisesti stabiileja.
- Sekoittavat diffuusioprosessit kompakteilla monistoilla. Häiriönä voi olla toinen diffuusioprosessi tai sekoittava Markovin siirros. Siten esimerkiksi Brownin liikkeen tai Ornstein-Uhlenbeckin prosessin kaltaisen abstraktion soveltaminen tilastollisen fysiikan ongelmiin saa tässä oikeutuksensa. Sivutuloksena saadaan paras mahdollinen äärettömän aikahorisontin tasainen yleistys todennäköisyysteorian ns. invarianssiperiaatteille.
- Suuri luokka äärettömiä, vuorovaikutteisia hiukkassysteemejä. Häiriönä voi olla esimerkiksi äärellisen hiukkassysteemin ääretön jaksollinen jatke. α -kongruenssi tukee siten erittäin vahvassa mielessä näiden systeemien tutkimuksen perusolettamusta: fysikaalisen, spatiaalisesti äärellisen systeemin niin äärellisen kuin äärettömänkin aikavälin käyttäytyminen on analysoitavissa ääretöntä systeemiä tutkimalla.

Näistä esimerkeistä voimme jo nähdä, että α -kongruenssi johtaa huomattavan laaja-alaiseen stabiilisuuskäsitteeseen, joka erikoistapauksina tai variaatioina sisältää aiempia sekoittavien systeemien stabiilisuus- ja konvergenssikäsitteitä.

4. Yhteenveto

Bernoullin teoria on ollut ergoditeorian ja ehkä koko dynaamisten järjestelmien tutkimuksen merkittävimpiä saavutuksia viimeisten vuosikym-

menten aikana. Sen avulla kaoottisia järjestelmiä ja stokastisia prosesseja on mahdollista käsitellä yhtenäisen käsitteistön puitteissa. Tällä determinismin ja satunnaisuuden välisen erottelun häivyttämisellä saatetaan olla filosofiseltakin kannalta syvällisiä seurauksia. Oliko Einstein kvanttimekaniikkaa arvioivassa toteamuksessaan 'God doesn't play dice' sittenkin oikeassa. Vaikka mikromaailman prosessit olisivatkin deterministisiä, ovat ne silti meille, havaintojemme äärellisen tarkkuuden uhreille, isomorfisia satunnaisprosessien kanssa. Teoria on kuitenkin vielä kehitysvaiheessa ja eräät sen teoreettiset ja käytännölliset, esimerkiksi kompleksisuusteoriaan ja kaoottisten järjestelmien simulointiin liittyvät tulokset, ovat vasta kristallisoitumassa.

Yksi Bernoullin teorian pääarkkitehdin, Don Ornsteinin, johtoaajatus on ollut, että niin kauan kuin kaaostutkimus on nykyisessä kaoottisessa tilassa, eli erityistulosten hajanaisena kokoelmana, kiinnostavin konjektuuri on se, että melkein kaikki kaaos on joko Bernoullin virtausta tai sen ja jonkin yksinkertaisemman systeemin tulo. Tämä artikkeli on toivottavasti selkeyttänyt tämän formuloinnin taustaa ja merkitystä. Sen täsmentäminen luultavimmin edellyttää läpimurtoa K-automorfismien isomorfiateoriassa, joka tällä hetkellä on täysin hämärä. Ja kuin osoituksena tietojemme puutteellisuudesta tiedämme jo nyt esimerkiksi sen, että on olemassa dynaaminen järjestelmä, joka ei ole K ja joka ei ole deterministinen, mutta joka ei ole myöskään näiden suora tulo!

Viitteitä

Ergoditeorian yleisesityksiä ovat mm. Petersonin teos *Ergodic Theory*, Cambridge University Press, 1983, ja laajempi Cornfeldin, Fominin ja Sinain teos *Ergodic Theory*, Springer-Verlag, 1982.

Bernoullin teorian alkusysäys tuli 50-luvun lopulla, kun Kolmogorov ja Sinai toivat entropiakäsitteen ergoditeoriaan. Bernoullin systeemien isomorfiaprobleema oli lukuisista yrityksistä huolimatta jokseenkin täysin jumissa parikymmentä vuotta, kunnes Ornstein ratkaisi sen vuonna 1969. Johdannoksi isomorfiateoriaan sopii esimerkiksi Shieldsin teos *The Theory of Bernoulli Shifts*, University of Chicago Press, 1973. Teoria on sittemmin hänen ja muiden tutkijoiden ansiosta yleistetty lukuisiin eri suuntiin, ja suurin osa tuloksista toimii niin diskreetissä kuin jatkuvassakin ympäristössä, joten Bernoullin systeemien teoriasta on mielekasta puhua. α -kongruenssin keksivät Ornstein ja B. Weiss vasta äskettäin. Suppea, yleistajuinen esitys siitä on julkaistu *Sciencessä*, Vol. 243, Jan. 1989, ja yksityiskohtainen artikkeli julkaistaan lähiaikoina *Bulletin of American Mathematical Societyssä*. α -kongruenssin osoittamisesta eräille hyperbolisille ja stokastisille systeemeille saa tietoa tämän artikkelin kirjoittajan julkaisuista *Alpha-congruence for Markov Processes*.

ses (julkaistaan *Annals of Probability* -lehdessä) ja *Alpha-congruence for Billiards* (tutkimusraportti, pohjautuu väitöskirjatyöhön Stanfordin yliopistossa).

Sileä dynamiikka on ohjannut dynaamisten järjestelmien teorian kehitystä aina Poincarén urauurtavista ensihavainnoista asti. Modernina johdantona sen problematiikkaan voi käyttää esimerkiksi Guckenheimerin ja Holmesin teosta *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983. Suositeltava on myös Manén teos *Differentiable Dynamics*, sama kustantaja, toinen painos. Erinomaisena katsausartikkelina mainittakoon Pesinin artikkeli *Characteristic Exponents and Smooth Ergodic Theory*, *Russian Math. Surveys*, 32, no. 4, 1977.

Summary

On the order in chaos

We present an overview of certain recent results in ergodic theory aimed to unify the study of dynamical systems. They use the machinery of Bernoulli theory which we also discuss and compare to parallel attempts to analyze chaotic dynamics.

PhD Kari Eloranta
Teknillinen korkeakoulu, matematiikan laitos
02150 Espoo

keloranta@hila.hut