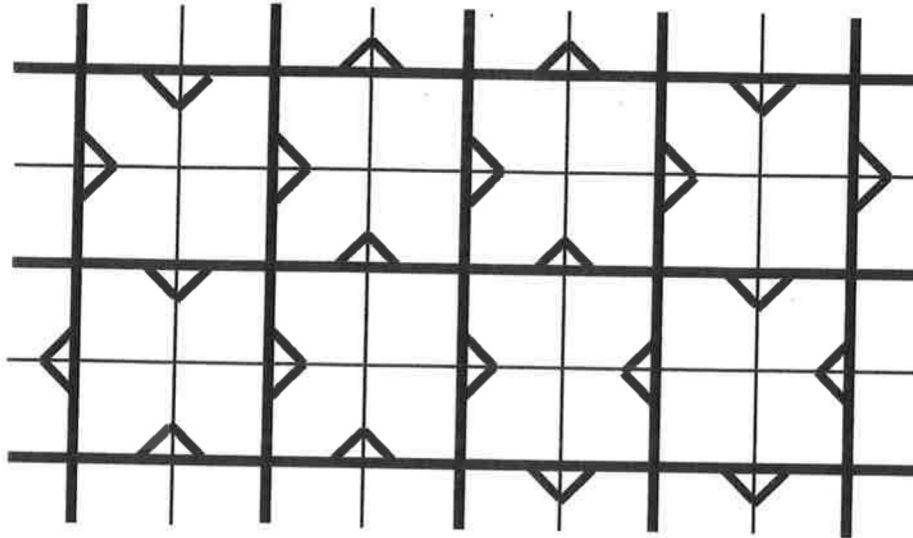




Kuva 1

Dominot, jää ja Napapiirilause

Tarkastellaan shakkilaudan osajoukkoa, joka on sellainen yksikköruutujen rypäs, jossa jokaisella ruudulla on ainakin yksi yhteinen sivu osajoukon toisen ruudun kanssa. **Dominolla** tarkoitetaan kahta yhteen liimattua ruutua. Jotta osajoukko olisi **kaakeloitavissa** dominoilla, on sillä tietenkin oltava parillinen ala, mutta tämä ei ole riittävä ehto. Esimerkiksi alueella, joka muistuttaa reikää tiiliseinässä (oletetaan että myöskin tiilet ovat 1×2), jonka ala- ja yläreunat ovat tasaiset ja sivut "hammastetut", ei ole välttämättä yhtään dominokaakelointia. Mutta jos tällä alueella on sama määrä mustia ja valkoisia ruutuja, on se kaakeloitavissa tasan yhdellä tavalla. Itse asiassa pienin lisätarkastelu voidaan selvittää välttämättömän ja riittävä ehto sille, että löytyy vähintään yksi kaakelointi annetulle alueelle. Ja eräillä alueilla, kuten neliöllä, jolla on parillinen sivunpituus, on todella runsaasti erilaisia dominokaakeloiteja (koko shakkilaudalla niitä on 12988816).

Näitä dominoasetelmia kutsutaan

myös dimeerikonfiguraatioiksi neliöhilalla. Samainen tarkastelu voidaan tehdä myös muilla hiloilla; esimerkiksi dimeerikonfiguraatiot kolmiohilalla vastaavat tason kaakelointia salmiakeilla. Vieläkin mielenkiintoisempaa on se, että eräät muut, näennäisesti kovin toisenlaiset hilamallit, osoittautuvat dominojen lähisukulaisiksi kun ne nähdään kaakelointeina.

Tilastollisen mekaniikan **jäämallit** ovat hilamalleja, joissa ei ole minkäänlaisia spinmuuttujia, vaan konfiguraatio määräytyy lähimpien hilapisteiden välisten nuolien orientaatiosta. Jäämalli voidaan määritellä jokaisella hilalla, joka on parillista astetta (kun se ymmärretään graafina). Sääntö nuolille on yksinkertaisesti se, että jokaiseen hilapisteeseen tulee yhtä monta nuolta kuin siitä lähtee. Formulaatio on itse asiassa erittäin hyvä fysikaalinen malli vesimolekyyleille jäähilassa, siitä nimi. Jos tarkastellaan tätä mallia neliöhilalla ja kirjataan nuolet koloina ja nyppyyinä yksikköneliöihin, vastaa nuolikonfiguraatio tason kaakelointia yksinkertaisin

Wangin kaakelein kuvan 1. Mukaisesti (ohuet viivat kuvaavat hilaa, paksut kaakeleiden reunoja). Jos nyt kiinnitetään tasoalue reunanyppyyneen ja -koloineen, voidaan jälleen kysyä alueen kaakeloinnista, sen monikäsitteisyydestä jne.

Edellä mainitun kaakeloinnin olemassaolon lisäksi keskeiset kysymykset näiden ja muiden samantaisten mallien kohdalla ovat seuraavat: 1. Milloin on annetun alueen kaakelointi yksikäsitteinen?, 2. Milloin alueella on monta kaakelointia ja erityisesti, milloin niitä on eksponentiaalisen monta alueen pinta-alan funktiona? ja 3. Miltä tapauksen 2. kaakeloinnit näyttävät geneerisesti? Kohta kolme siis kysyy, miltä kaakeloinnit tyypillisesti näyttävät alueella, jonka muoto ja reunaehto pysyvät samana kun kaakelin koko skaalataan nollaan (ammattikielellä; otetaan skaalausraja). Viimeiksi mainittu antaa tietoa siitä, miten pitkän kantaman järjestys reunalta alueen sisään manifestoituu kaakeloinnin geometriassa.

Alkuperäinen sysäys näihin tutkimuksiin löytyy **Piet Kasteleynin** jo klassisesta dimeerejä käsittelevästä paperista [K], jossa hän huomauttaa: "...The effect of boundary conditions is, however, not entirely trivial and will be discussed in more detail in a subsequent paper...". Näin kirjoittaessa hän ei luultavasti osannut kuvitella, että kestäisi melkein 40 vuotta, ennen kuin yhtenäinen kuva näistä tilastollisen mekaniikan ilmiöistä alkaisi selkeytyä (eikä se alkanut hänen tulevista papereistaan...). Mutta nyt siis **John Horton Conway** ja **Bill Thurstonin** päänavausten ja **Jim Proppin, Rick**

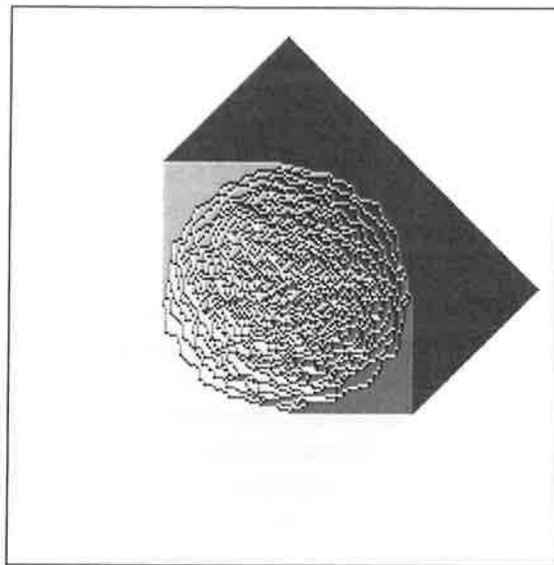
Kenyonin ja lukuisten muiden töiden johdosta yhtenäisteoria on vähitellen muotoutumassa (e.g. [CL], [T], [CEP], [E]).

Jäämallit neliö-, kolmio-, Kagomé jne. hiloilla ovat esimerkkejä verteksi-malleista, mutta eräs ratkaiseva ero niiden ja muiden samantyyppisten mallien, kuten kahdeksan-verteksi mallin välillä on se, että ne sallivat ns. **korkeusfunktion** (joka myös esimerkiksi domino- ja salmiakkikaakelointi sallii). Tämän kokonaisluokaruvoisen funktion, joka elää duaalihilalla, inkrementti määräytyy siitä, mikä on ylitetävän dominon/jäänuolen jne. orientaatio kun siirrytään duaalihilan pisteestä sen lähimpään naapuriin. Funktion arvo on bijektiivisessä vastaavuudessa nuolikonfiguraation kanssa ja kuvaa erittäin käyttökelpoisella tavalla sen säännöllisyyttä. Alueella, joka sallii vain täysin täysin järjestyneen konfiguraation, tämän funktion diskreetti derivaatta on ekstremaalinen. Kääntäen, esimerkiksi korkeudella pitkin polkua, joka kulkee läpi shakkilaudan tyypillisen dominokaakeloinnin (jotka melkein kaikki näyttävät epäjärjestyneiltä), on hyvin pieni variaatio.

Kiinnostavia edellä mainitun

kolmannen probleeman kannalta ovat erityisesti alueet ja reunaehdot, joilla on ei-triviaali reunakorkeus. Tämä tarkoittaa sitä, että reunakonfiguraatio sallii sisuksen monikäsitteisen kaakeloinnin, mutta rajoittaa sitä kuitenkin jollain tavoin. Dominoille tällaisesta esimerkkinä mainittakoon rombi (dominoille alueen muoto määrää yksikäsitteisesti reunakorkeuden) ja neliöhilan jälle rombi, jolla on telttamainen reunakorkeus jokaisella rombin sivulla.

Konfiguraatioiden generointi alueelle, josta tiedetään muoto ja reunakorkeus, on ei-triviaali tehtävä.



Kuva 2

Dominoille rombilla on olemassa näppärä heuristiikka tähän tarkoitukseen, mutta yleensä on käytettävä stokastista soluautomaattia (PCA) tai Glauber dynamiikkaa. Tällöin taas nojaututaan ratkaisevasti konfiguraatiojoukon yhtenäisyyteen. Tällä tarkoitetaan sitä, että (äärellisellä) jonolla alkeellisia **lokaaleja operaatioita** voidaan tietyn reunaehdon toteuttavat konfiguraatiot muuntaa toisikseen. Dominoille tämä operaatio on kahden vierekkäisen 2×2 muodostelmassa olevan palikan kierto 90 astetta. Jälle operaatio taas on pienimmän suunnatun syklin kääntäminen (neliöhilalla tämä tarkoittaa neljän pituisen suunnatun syklin, 1 -

syklin, kääntämistä, mutta esimerkiksi Kagomé hilalla tarvitaan mahdollisuus kolmen erilaisen, kolmen ja kuuden pituisen, alkeisluupin kääntämiseen). Jo ennen konfiguraatioiden simulointia tietokoneella on siis todistettava, että se on alkeisperturbatioin edes mahdollista! Onneksi tämä onnistuu ja yhtenäisyys on todistettavissa myös muille edellä mainituille kaakeloinnille ja hiloille. Lisäksi nykyään on jo olemassa joukko tuloksia, jotka takaavat PCAn eksponentiaalisen konvergenssin tasapainotilaan (joka on maksimientropian mitta alueen ja reunaehdon sallimien konfiguraatioiden joukolla).

Kuvassa 2 on jääkonfiguraatio 102×102 rombilla (neliön sisässä, koko viittaa reunanuolien lukumäärään). Kyseessä on otos iteraatilla 20.000 , hyvin lähellä tasapainoa. Alkutilan korkeus näytti kaakko-luodesuuntaiselta harjakatolta (vastaten sitä, että toisella puoliskolla kaikki nuolet osoittivat joko pohjoiseen tai länteen ja toisella joko etelään tai itään). Kuvassa nuolineliöiden orientaatio on koodattu harmaasävyyn. Rihmat ovat yksilutoteisia defekteja satunnaisliikkeessä järjestäytyneen konfiguraation keskellä.

Kansilehden alempi kuva näyttää 1 -sykliä kääntötiheyden samassa ajossa kuin edellä, kumuloituvasti 5000 iteraattia tasapainossa. Keskellä aktiviteetti on korkeimmillaan, kun taas reunat ja erityisesti kulmat ovat "jäätynneet" - niissä 1 -syklejä ei ole ja niinpä konfiguraatio on täysin reunakonfiguraation kiinnittämä. Demarkaatiolinjaa epäjärjestyneen keskuksen ("tropiikin") ja jämähtäneen reuna-alueen välissä kutsutaan **Napapiiriksi** (tässä englanninkielinen termi The Arctic Circle on osuvampi!). Tämä yllättävä ilmiö, jota voidaan perustellusti kutsua spatiaaliseksi faasinmuutokseksi, havaittiin ensin rombin dominokaakeloinnille ja sittemmin neliöjälle.

Nykyään reunaympyrän esiintyminen näissä malleissa on jo korotettu teoreeman statukseen. Kuvasta kannattaa myös huomata se, että jakauma tropiikissa näyttää melko isotrooppiselta - vihje, joka sekin on johtanut täsmälliseen tulokseen.

Alkuperäisen kaakelointiprobleeman kannalta Napapiirilause tarkoittaa siis sitä, että edellä mainitulla reunaehdolla rombin, jossa on suuri määrä nuolia, melkein kaikki nuolikonfiguraatiot ovat sellaisia, joissa keskus on epäjärjestynyt (nuolet osoittavat satunnaisesti eri suuntiin - tämä pystytään edelleen kvantifioimaan) ja ympyrän ulkopuolinen alue täysin järjestäytynyt (reunan mukaisesti orientoitunut).

Muille hiloille, kaakeliuodoille, alueille ja reunakorkeuksille sisuksen geometria voi olla melkoisen eksoottinen. Kannen ylempi kuva esittää alkeisluoppien kääntötiheyden kuusikulmion muotoisella kolmionhilar alueella (51 hilapistettä per sivu, 6000 iteraattia PCAn tasapainotilassa). Reunakorkeus on sellainen, että se kiinnittää kuusi kulmissa olevaa salmiakin muotoista osa-aluetta ketjuun. Mutta kuten kuvasta selvästi näkyy, reunavaikutus ulottuu syvemmälle ja tropiikki sijaitsee vasta jossain kuusiterähtisen kukan sisällä. Itse asiassa on syytä epäillä, että tässä alueessa tapahtuu vielä toinenkin spatiaalinen faasinmuutos; "kiinteä olomuoto" muuttuu kukan reunalla "nesteeksi" ja edelleen "kaasuuntuu" sisemmällä käyrällä (ympyrällä?). Tämän ilmiön kvantifiointi ja täsmällinen ymmärtäminen on vielä kesken. Mainittakoon, että monifaasi-ilmiö on havaittu myös rombin ns. diablo-kaakeloinnissa ja symbolisin ohjelmin on pystytty ratkaisemaan se kahdeksannen asteen algebralinen lauseke, joka antaa molemmat rajakäyrät.

Niin dominoiden kuin jäämallinkin ääretön versio on ratkaistu jo vuosikymmeniä sitten (viitteet esim. [B]). Viimeaikaiset menetelmät ja tulokset äärelliselle versiolle ovat luonteeltaan enemmän kombinatorisia ja stokas-

tisia. Prosessi, jolla näihin on päädytty on melkein päälliesimerkki tietokoneavusteisesta matemaattikan tutkimuksesta. Aluksi eräät heuristiset simulaatiot vihjasivat siihen, että kyseisissä äärellisissä versioissa saattaisi esiintyä mielenkiintoinen pitkän kantaman järjestys. Sitten alkeisoperaatiot (dominoiden/salmiakkien/suunnattujen nuoliluoppien kääntäminen) osoitettiin (liitutaululla!) transitiiviseksi operaatioksi, joka antoi konfiguraatiojoukon yhtenäisyyden. Tämän jälkeen simulaatioita voitiin jatkaa varmana siitä, että konvergoidessaan ne todella tuottivat näytteitä tasaisesti koko konfiguraatiojoukosta, eikä vain jostakin sen osajoukosta. Näissä tietokoneajoissa matemaatikot löysivät Napapiirin. Tämä yksinkertainen rajakäyrä oli yllätys (kaikesta päätellen myös fyysikoille), sillä täydellinen isotropia on tuiki harvinaista hilamalleissa. Tämä huomio väännettiin edelleen perinteisin menetelmin todistukseksi. Lisäsimulaatiot antoivat vihjeitä ja viitoittivat teoreettista analyysia joka kulminoitui variaatioperiaatteeseen, jolla voidaan täsmällisesti karakterisoida myös eksoottisempia rajakäyriä. Matkan varrella paljastui joukko kiintoisia ja edelleen osin hämääviä yhteyksiä mm. konformiseen invarianttiin ja hyperboliseen geometriaan.

Kari Eloranta

Kari Eloranta on TKK:n matemaatiikan dosentti, joka on vuosien varrella tutkinut biljardia, sekalaisia satunnaisprosesseja, ergoditeoriaa, soluautomaatteja ja viimeksi siis uponnut sohjoon eli jää-malliin. Muuten ei Napapiirin tuonpuoleinen juuri kiinnosta, vaan liike suuntautuu enemmän tropiikkiin.

[B] Baxter, R.J.: *Exactly solvable models in statistical mechanics*, Academic Press, 1982.

[CEP] Cohn, H., Elkies, N., Propp, J.: Local statistics for random domino tilings of the Aztec diamond, *Duke Math. J.*, **85**, pp. 117-166, 1996.

[CL] Conway, J.H., Lagarias, J.C.: Tilings with polyominoes and combinatorial group theory, *J. Combin. Theory*, Ser. A, **53**, pp. 183-208, 1990.

[E] Eloranta, K.: Diamond Ice, *J. Stat. Phys.*, **96**, 5/6, 1999 and Bounded triangular and Kagomé ice, Res. Report. A 410, Inst. Of Math., Helsinki Univ. of Tech, 1999.

[K] Kasteleyn, P.: The statistics of dimers on a lattice, I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice, *Physica*, **27**, pp. 1209-1225, 1961.

[T] Thurston, W.P.: Conway's tiling groups, *Am. Math. Monthly*, pp. 757-773, Oct. 1990.